科學與工程技術期刊　第二卷　第二期　民國九十五年

Journal of Science and Engineering Technology, Vol. 2, No. 2, pp. 87-94 (2006)

馴化基質缺乏時污泥分解能力衰退之數學模式

張玉明　陳易新　黃文璽

大葉大學環境工程學系

彰化縣大村鄉山腳路 112 號

摘　要

活性污泥法是環工業者經常用來分解處理有機污染物的方法。若是處理的對象是具持久性／難處理特性的人造有機物，原始微生物（如一般廢水所培養的活性污泥）需要對該持久有機物進行一段時間的馴化，才能獲得分解能力，再使之成爲生長基質。廢水處理實務中，連續流活性污泥設施經常接受一般基質；如果又有要經過馴化方得被分解的持久有機基質偶發性進流，活性污泥對該難分解基質（馴化基質）的分解能力會反覆的增減。在馴化基質缺乏不進流時，污泥對該物質的分解能力應會衰退，衰退的原因有：因污泥停留時間（θc）操作，有能力污泥遭到替換；因污泥使用一般基質生長，有分解能力的污泥受到稀釋；因分解能力未能持續誘導而衰退。本文就以上三種污泥衰退作用、及世代傳遞的增加作用作爲參數，建立有分解能力污泥經過一段馴化基質不進流時間之後，其保存量的數學模式。本數學模式可作爲實驗設計依據，也在實務上有助於處理效果估計及操作策略之擬訂。

關鍵詞：分解能力，活性污泥，難分解有機物，馴化

Mathematical Models for Calculating Quantities of Activated Sludge Degradability during the Period of Non-Feeding of a Xenobiotic Substrate

NYUK-MIN CHONG, YI-SHIN CHEN and WEN-SHI HUANG

Department of Environmental Engineering, Da-Yeh University

112 Shan-Jiau Rd., Da-Tsuen, Changhua, Taiwan

ABSTRACT

When an indigenous microbial population such as an activated sludge is initially placed in a degradation reaction with a persistent xenobiotic, an acclimation must be completed before the sludge can degrade the xenobiotic as a substrate.　In the case of an activated sludge operating with a normal influent of ordinary substrate and intermediate inputs of a xenobiotic substrate, the degradation capacity of the activated sludge for the xenobiotic can be enhanced through acclimation and can diminish for a number of reasons.　This report describes the formulation of mathematical models that calculate the quantities of sludge retaining degradation capability over the period following non-feeding of the xenobiotic.　The factors contributing to a decrease in the capable sludge include displacement due to a wasting program for maintaining the required mean-cell-residence-time, replacement and dilution by sludge grown from other substrates, and de-acclimation in the absence of induction. An increase is also possible due to the growth of new cells that have inherited capable-sludge ability. The mathematical models can serve the purposes of designing experiments for research and formulating operational strategies for practical treatment facilities.

***Key Words*:** degradation capacity, activated sludge, persistent xenobiotics, acclimation

一、前言

活性污泥對於有機污染物的處理機制，是污泥所含的微生物群體發揮其生化分解作用所致。活性污泥微生物群體之中包括細菌、真菌、及原生動物等。活性污泥法即是應用這些來自自然界微生物的分解能力，再藉由人爲設施和人工控制下進行廢水污染物質的處理。由於活性污泥法可獲致良好的處理水質，環境工程業者經常使用活性污泥作爲有機污染物的分解處理。

污泥所以能發揮處理功效必須要有分解能力。由於工業高度發展與生產使得廢水、廢氣及廢棄物中出現各種人造有機物，如除草劑、除蟲劑、化學肥料等。這些含碳化合物雖然屬於有機物，但是自然界的一般原始（indigenous）微生物未曾接觸過它們，因此，一般微生物對這些有機物是陌生的（稱 xenobiotic），也因此不具備分解能力；換個角度來看，這些有機物不易被分解，因而表現出持久性。一般原始污泥在接觸持久性有機物初期，要經過一段遲滯時間（lag time），等待污泥適應該物質之後，才能將之分解。這個過程稱爲馴化（acclimation）。馴化是一種分解能力取得的過程 [3, 6]。馴化過程表示污泥對於持久性有機物的分解能力是由後天獲得者 [1, 7]；這個取獲的能力有興起與衰退的情形，因此分解能力也有高低之別。分解能力的得與失，及其程度的高低，影響污泥對於持久性有機物的處理成敗。

連續流活性污泥操作是採廢水連續進流，使進流水中的有機物與活性污泥接觸反應，藉微生物分解而去除之；分解過程污泥也得到培養增長。連續流活性污泥操作要進行污泥之定量排除（替換），據此維持一個平均污泥停留時間（mean-cell-residence-time，符號爲 θc）[2, 5]。

連續流活性污泥在廢水處理實際應用上的首要對象是一般基質，如人們生活所排出的天然有機物。如果活性污泥遭受持久性有機物進流，則污泥要有足夠的馴化時間，以便建立分解能力，並使得該物質成爲生長基質。該物質是馴化促成者而本身成爲生長基質，稱爲馴化基質。馴化基質經常進流者，長時下來污泥經常具備持久性有機物的分解能力。在馴化基質偶發性進流的情況，活性污泥對該基質的分解能力會反覆的增減，增減過程中該分解能力的量度問題，值得探討。

持久有機馴化基質缺乏不進流時，污泥對該物質的分解能力衰退的原因主要有：因污泥停留時間（θc）操作，有分解能力的污泥遭到替換；因污泥使用其他基質生長，有分解能力的污泥受到稀釋；因得不到馴化基質誘導而能力衰退。分解能力也可世代傳承及橫向傳遞而得到增長。在這些因素相互影響之下，缺乏馴化基質進流一段時間之後，污泥究竟保有多少分解能力，在理論研究及實務作業上，都要求明確的解答。這些問題應由實驗研究求得相關答案，然而如何作成正確的實驗設計，其中參數定義及各參數的作用方式還須事先加以思考釐清及完成設定；此即爲基本反應及作用的數學描述。本文就以上三種污泥分解能力衰退作用、世代傳遞的增加作用、及假想人爲添加的情境作爲參數，建立數學模式，來表述及計算有能力污泥經過一段馴化基質不進流時間之後的保存量。本數學模式揭示活性污泥系統多種作用機制的走勢。證實此說的實驗可用本模式來作爲實驗設計依據。本模式在實務上也有助於處理效果估計及操作策略之擬訂。

二、方法

（一）系統介紹

假設一個連續流活性污泥，平時處理一般有機物，而某種持久難處理有機物（稱目標馴化基質）以不定時、偶發性的方式出現在進流廢水中。本文討論馴化基質缺乏時間過程，污泥的分解能力的保存量之計算方式。分解能力是抽象的，本研究用“具有分解能力的污泥量”（簡稱分解污泥）來表示之 [4]。

本連續流活性污泥系統之設定是：（1）啓始條件是污泥事前因馴化而得到若干分解污泥量；（2）而後原馴化基質不進流，稱爲 down time（DT）。DT 期間一般基質持續進流，且保持一定的污泥停留時間操作。此時分解污泥所面

臨的問題，在能力減少方面，有因污泥廢棄而損失、因一般污泥繁殖而稀釋、及因馴化機制消失而退化；在保存（或增加）方面，有分解污泥用一般生長的後裔繼承了能力；及（3）爲求更具靈活性，本研究也加入分解污泥定額增加（如人爲添加）的參數一則。

這個系統的參數及其在數學上的定義介紹如下述；相關參數符號及定義，列如表 1。

污泥系統全部之污泥量爲 1.0X；X 爲污泥濃度 mg/l [1]，DT 開始時系統中污泥濃度爲 Xo。

事前因目標基質的馴化，污泥大多成爲有分解能力者；在 DT 開始時間（t）爲 0 的時候，分解污泥的量是 $X_{D0}=\omega Xo$。X_D 爲分解污泥的濃度 mg/l，用於代表抽象的分解能力，是展現系統分解效率的重要因素。

DT 開始，馴化基質停止，只供給一般基質，而且持續廢棄污泥以維持污泥停留時間 θc 天（day）；這項操作是每日之廢棄量 X/θc（質量，見註 1）；在混合均勻的系統中，分解污泥的廢棄質量佔全部污泥相同的比例，即分解污泥的廢棄質量爲 $X_D/\theta c$（mg/l-day）。

假設系統還能保持（假）平衡狀態，系統（自動）每日長出 X/θc（mg/l-day）的污泥質量。此時新增的污泥是由一般基質長出來的，長出的污泥中有若干比例（或百分率 %）繼承了分解能力（其他部分因無分解需求回復‘原始’特性）。

分解污泥的能力退化在缺乏馴化基質的情形下發生；活性污泥系統裡面“有能力”者，是由基質馴化而來的。當馴化的力量消失（基質不在），除了用其他基質長出者不能全部繼承能力之外，原有能力不再需求，而成退化情勢。退化的表示方式是無馴化基質的時間過程，原分解污泥的若干比例（1/day）失去能力；連續時間的數學即是一階衰退反應。

定額增加是由外界人爲造成（添加），添加質量（mg/l-day）不受系統操作影響，但進入系統後如同內部污泥，受到相同操作及生長機制之對待。

有關分解污泥能力消退及增長的概念，列如圖 1 示意。本模式在應用上，以上作用機制的參數除了污泥廢棄作業必須包括之外，其他作用（參數）可以代入一定數值或忽略之。

表 1. 模式參數符號定義

符號	名稱	定義及單位
θc	污泥停留時間	污泥在系統中的平均停留時間。定義：系統中污泥量/每單位時間廢棄污泥量 (kg/kg/t)
X	污泥量	活性污泥系統整體污泥量 (濃度，mg/l)
X_D	分解污泥(具分解能力污泥)量	在污泥系統中具有分解能力（分解污泥）的污泥量 (濃度，mg/l)
X_{Dn}	第 *n* 日時間點之 X_D	
$X_D(t)$	在 *t* 時間之 X_D	
ω	分解污泥佔整體之比例	X_D/X （無單位）
ε	分解污泥之後嗣比例	X_D 之若干比例 （無單位）
γ	分解污泥後嗣繼承能力比例	ε 之若干比例 （無單位）
$\eta=\varepsilon\gamma$	新增(長出)有分解能力污泥	X_D 之若干比例 (1/ t)
S	添加污泥量	外界添加的分解污泥量（濃度/t）
μ	比生長速率	污泥的比生長速率 (1/t)
k_d	內呼吸率	(1/t)
κ	退化速率常數	(1/t)
r_R	污泥廢棄後系統每日留置污泥量因數	$r_R = (1-1/\theta c)$，濃度之比例（無單位）
r_{RG}	由留置污泥再長出量因數	$r_{RG} = (1-1/\theta c)(1+\eta/\theta c)$，濃度之比例
r_{RD}	由留置污泥，生長，再退化衰減量因數	$r_{RD} = (1-1/\theta c)(1+\eta/\theta c)(1-\kappa)$，濃度之比例

（二）數學模式推導

本文要探討上述系統經過 down time 過程，系統中保有多少 X_D。以下分析是求得各時間點在系統中 X_D 量。X_{D0} 之啓始值是 ωXo。模式自變數是時間，本文分別用離散時間（discrete time）及連續時間推導方程式。相關方程式推導所用到的參數與參數的定義，一同列如表 1。

1. 離散式（discrete time）

活性污泥法操作作業常以次數方式進行，故下列數學模式推導，時間變數爲‘離散’式（time as a discrete variable）。模式計算經過 n 日（整數）時間之後，上述活性污泥系統中的分解污泥保存量。推導的模式包括下列情況：廢棄、長出、退化、外部添加、以及綜合廢棄長出退化及添加等組合。

廢棄污泥後分解污泥的剩餘量方面，假設停留時間爲 θc 天。1 日後，分解污泥留下（保存，或因廢棄剩餘）量佔整體之比例爲 (1-1/θc)（無單位）；2 日後，留下者是 1 日後 (1-1/θc) 之 (1-1/θc)，故 2 日後留下者爲 $(1-1/\theta c)^2$；以此類推 n 日後留下者 $(1-1/\theta c)^n$。整數時間 n 日後，分解污泥留下

$$X_{Dn} = X_{D0}\,(1-1/\theta c)^n \ (\text{mg/l}) \qquad (1)$$

[1] 本文敘述污泥量全以濃度 mg/l 單位表示；運算需要用到質量時，假設乘入 1 單位反應器體積。

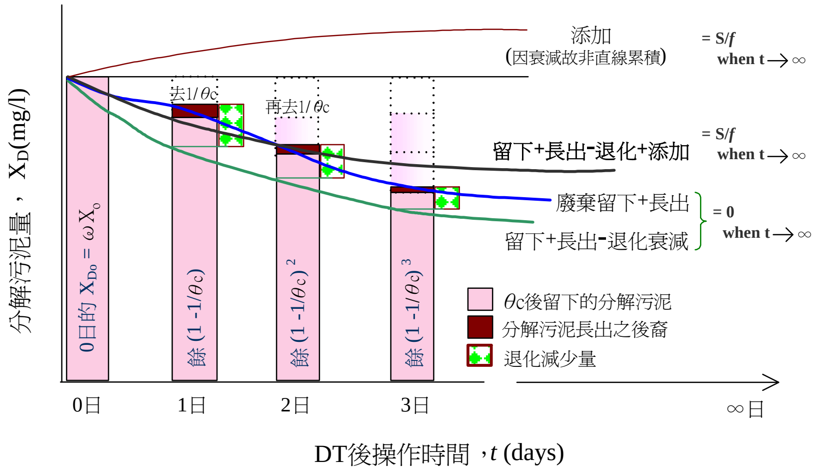

圖 1. **分解污泥經過污泥替換、及／或生長繼承、退化、及添加多日之後保存情形示意**

定義式（1）中 (1-1/θc) 數值爲 r_R，即 r_R = (1-1/θc)，是污泥停留時間的操作廢棄污泥後，而系統每日保留（或留置）污泥量的因數（factor）（無單位）。在一般操作情況之下，θc > 1，所以經常 r_R < 1.0。（實際上，θc 必須保持某最低值 [2]，且θc=1 表示每日污泥都全部廢棄，這種情形之下活性污泥系統不能存在。）

廢棄污泥後加上長出量的情形，假設保持平衡狀態之下每日有 1/θc 的污泥質量長出來 [3]。設長出的污泥中 (1/θc mg/l) 有 ε 比例（或 %）是由能分解者長出者，再假設長出者繼承了 γ 比例的分解能力，則每日新增（產出）分解污泥爲

$$(X_D/\theta c)\times \varepsilon\times \gamma = (X_D/\theta c)\times \eta \qquad (2)$$

式中 η= εγ（無單位）； η, ε 及 γ < 1.0（實際上不能長出比 1/θc 多的污泥量）

1 日後，因廢棄剩餘佔整體之比例爲 $(1-1/\theta c)^1$；因繼承而增加者爲 (1/θc)×η= (1-1/θc)(η/θc)，留下與繼承者相加則系統中總共有 $(1-1/\theta c)+(1-1/\theta c)(\eta/\theta c)=(1-1/\theta c)^1 (1+\eta/\theta c)^1$。2 日後，系統中總共有 $(1-1/\theta c)^2 (1+\eta/\theta c)^2$。以此類推，n 日後，系統中總共有

$$X_{Dn} = X_{D0}\,(1-1/\theta c)^n\,(1+\eta/\theta c)^n \quad (mg/l) \qquad (3)$$

定義數值

$$r_{RG} = (1-1/\theta c)(1+\eta/\theta c)$$

$$= \left(1+\frac{\eta-1}{\theta_c}-\frac{\eta}{\theta_c{}^2}\right)=\frac{\theta_c{}^2+\theta_c(\eta-1)-\eta}{\theta_c{}^2} \qquad (4)$$

r_{RG} 是每日由留置污泥再加長出之分解污泥量因數（無單位）。如果要求 r_{RG} <1.0，則設 $\frac{\theta_c{}^2-\theta_c(1-\eta)-\eta}{\theta_c{}^2}<1.0$，$-\theta_c(1-\eta)-\eta<0$，$\eta(\theta_c-1)<\theta_c$，$\eta<\frac{\theta_c}{(\theta_c-1)}$ 即可符合。$\frac{\theta_c}{(\theta_c-1)}$ 經常 >1，則在要求 η<1 之下，r_{RG} 經常 <1.0。

以上污泥保存量的時間點 n 日爲一整數，但此數所代表的實際時間落點，對於下列二種情況並不完全一致：對於經過廢棄而留下的污泥而言，n 日表示 n 日結束時，即完成污泥廢棄操作的時間點；對於生長出來的污泥，則是 n+1 日污泥廢棄操作之前的時間點。唯本模式仍以 discrete 時間點爲基礎，時間的準確度只能接近實際廢棄污泥作業。本項討論在連續時間時模式之下可以獲得改善。

退化的簡易表示方式是經過無馴基質操作日數之後，有若干比例的 X_D 成份失去能力（即一階衰減反應）。設每日有 κ 比例 (1/t) 的 X_D 退化，則 1 日後，因廢棄剩餘佔整體之比例 = $(1-1/\theta c)^1$；此含量 1 日後損失 $-\kappa(1-1/\theta c)^1$，留下 $(1-1/\theta c)^1(1-\kappa)$。以此類推，n 日後，系統保存有

---

[2] 此條件得以成立，污泥停留時間必須操作大於最小值 θc_{min}；$\frac{1}{\theta_c{}^{min}}\cong \mu-k_d$（見表 1 定義）。

[3] 連續流生物反應器 CSTR 的操作理論。1/θc 污泥質量是指 1/θc 數值濃度的污泥，乘於 1 單位反應器體積。

$X_{Dn} = X_{D0}(1-1/\theta c)^n (1-\kappa)^n$ (mg/l) （5）

綜合廢棄、生長繼承、及退化情形下 n 日後系統共有分解污泥爲

$X_{Dn} = X_{D0} (1-1/\theta c)^n (1+\eta/\theta c)^n (1-\kappa)^n$ (mg/l)

$$= X_{D0}\,(1-\frac{1}{\theta_c})^n\left(\frac{(\theta_c+\eta)(1-\kappa)}{\theta_c}\right)^n \text{(mg/l)} \qquad （6）$$

定義數值

$r_{RD} = (1-1/\theta c)(1+\eta/\theta c)(1-\kappa)$

$$=(1-\frac{1}{\theta_c})\left(\frac{(\theta_c+\eta)(1-\kappa)}{\theta_c}\right)=\frac{(\theta_c+\eta)(\theta_c-1)(1-\kappa)}{\theta_c{}^2} \qquad （7）$$

r_{RD} 是由留置污泥，加上長出繼承分解污泥量，再減去退化損失每日分解污泥量因數（無單位）。$r_{RD}=r_{RG}(1-\kappa)$；右邊兩項皆爲 <1.0，故二者乘積 <1.0。

外部添加的情形，是操作者爲了達某特定目的（包括實驗設計所需），而刻意添加具有相同能力的分解污泥。（刻意取出較不符實際需要，且如何從混合液中取出特定污泥，有操作困難）。考慮每日添加量 S（單位體積之質量 mg/l-day，假設添加不會改變污泥所佔的體積），且假設添加量條件是 S < X/θc，即 S 數值 <1 且正規化爲（normalized to）S/θc。這個要求的原因有二：（1）無論添加是爲了合乎某種實驗設計或是實際功能所需，大量添加破壞原系統的條件，成特殊處理；（2）添加量 S 大於減少量（如廢棄及退化）表示分解污泥不會減少反而（無限）增加，這種情況之下討論污泥保存量已無意義。

考慮任何操作及／或生長或退化機制之下，即無論每日分解污泥的保存因數是 r_R、r_{RG} 或是 r_{RD} 之下，進行添加；添加者進入系統之後，即與內部的污泥一樣經歷廢棄、生長、及／或退化的命運。保存因數以 r_{RX} 來表，1 日後，保存+添加量爲 $X_{D0}\, r_{RX} + S$ (mg/l)；2 日後，保存量爲 $X_{D0}\, r_{RX}{}^2$，而添加進去的污泥只在系統中 1 日，只經歷一次保存／消減作用，故添加者的保存量爲 S r_{RX}，所以 2 日後保存+添加爲 $X_{D0}\, r_{RX}{}^2 + S\, r_{RX} + S$；3 日後，保存+添加量爲 $X_{D0}\, r_{RX}{}^3 + S[r_{RX}{}^2 + r_{RX}{}^1 + 1]$。以此類推 n 日後保存+添加

$$X_{Dn} = X_{D0}\, r_{RX}{}^n + S\times\sum_{i=0}^{n-1} r_{RX}{}^i \text{ (mg/l)} \qquad （8）$$

上式（8）最右之幾何級數 $S\times\sum_{i=0}^{n-1}(r_{RX})^i$，在 r_{RX} < 1.0 條件下，可改寫成爲 $S\times\frac{(1-r_{RX}{}^n)}{1-r_{RX}}$，則式（8）成爲

$$X_{Dn} = X_{D0}\, r_{RX}{}^n + S\times\frac{(1-r_{RX}{}^n)}{1-r_{RX}} \text{ (mg/l)} \qquad （9）$$

就上式（9）有關添加之通式，代以個別機制以求分解污泥保存量如下。

污泥廢棄剩餘量以及外部添加同時發生時，式（9）中 $r_{RX}=r_R=\left(1-\frac{1}{\theta_c}\right)$，式（9）成爲 $r_R{}^n + S\times\frac{(1-r_R{}^n)}{1-r_R}$；

而 $1-r_R$ = 1/θc，式（9）再整理成 $X_{D0}r_R{}^n + S\times\theta_c(1-r_R{}^n)$，則

$$X_{Dn} = r_R{}^n(X_{D0}-S\theta_c)+S\theta_c \text{ (mg/l)},\ \theta c > 1 \qquad （10）$$

污泥廢棄剩餘量及長出，以及外部添加

此時式（9）中 $r_{RX}=r_{RG}=\left(1-\frac{1}{\theta_c}\right)\left(1+\frac{\eta}{\theta_c}\right)$，

式（9）成爲

$$X_{Dn} = X_{D0}\, r_{RG}{}^n + S\frac{\left(1-r_{RG}{}^n\right)}{1-r_{RG}} \text{ (mg/l)} \qquad （11）$$

$$r_{RG}{}^n = \frac{\left(\theta_c{}^2+\theta_c(\eta-1)-\eta\right)^n}{\theta_c{}^{2n}},$$

且 $\left(1-r_{RG}\right)=\frac{1}{\theta_c{}^2}\left(\theta_c(1-\eta)+\eta\right)$，故式（11）寫成

$$X_{Dn}=X_{D0}\left(\frac{\theta_c{}^2+\theta_c(\eta-1)-\eta}{\theta_c{}^2}\right)^n + \frac{S\theta_c{}^2}{\left(\theta_c(1-\eta)+\eta\right)}\left(1-\frac{\left(\theta_c{}^2+\theta_c(\eta-1)-\eta\right)^n}{\theta_c{}^{2n}}\right)\text{ (mg/l)} \qquad （12）$$

式（12）可簡化的空間不大。此外，θc 與 η 值相差很大應避免分項計算（尤其應避免分項舉 n 次方），否則造成 overflow 及 truncate 問題，使計算準確度盡失，故計算用原

式（12）即可。如果使用計算機程序運算，則原式（8）之級數加和程序為上選。

廢棄污泥剩餘量、長出、退化，以及外部添加同時發生時，式（9）中 $r_{RX} = r_{RD} = \left(1-\frac{1}{\theta_c}\right)\left(1+\frac{\eta}{\theta_c}\right)(1-\kappa)$，

式（9）改寫成

$$r_{RD}{}^n + S\frac{\left(1-r_{RD}{}^n\right)}{1-r_{RD}} \qquad (13)$$

$$r_{RD}{}^n = \frac{\left((\theta_c+\eta)(\theta_c-1)(1-\kappa)\right)^n}{\theta_c{}^{2n}} \quad \text{（無單位）}$$

則本例為

$$X_{Dn}=X_{D0}\left(\frac{(\theta_c+\eta)(\theta_c-1)(1-\kappa)}{\theta_c{}^2}\right)^n + \frac{S\theta_c{}^2}{\theta_c{}^2-(\theta_c+\eta)(\theta_c-1)(1-\kappa)}\left(1-\frac{\left((\theta_c+\eta)(\theta_c-1)(1-\kappa)\right)^n}{\theta_c{}^{2n}}\right)(\text{mg/l}) \qquad (14)$$

2. 連續式（continuous time）

如果系統的各項操作可以維持連續一貫，廢棄污泥連續操作，則時間變數當回復其連續的特性，本研究所要建立的數學模式可用連續時間變數來表示。

簡單連續廢棄情況，設每日分多次（i 次）廢棄污泥，則每次廢棄量是 1/iθc，式（1）的指數就是 $i\times n$，即式（1）改寫成為 $(1\text{-}1/i\theta c)^{in}$。如果 i 是無限多次，則式（1）原來表示 n 時段無限縮短，成為連續數值；此數值表示連續時間 t。式（1）則成為

$$X_D(t) = X_{D0}\left(1+\frac{-\,t/\theta_c}{i}\right)^i \qquad (15)$$

當 $i\rightarrow\infty$，式（15）成為

$$X_D(t) = X_{D0}\, e^{-1/\theta_c\, t} \qquad (16)$$

另一推導方式，設連續方式廢棄污泥達到某個 θc（條件見註 2），污泥減少（人為的廢棄）量，是總量的 1/θc（即 X/θc，見註 3）。對於‘分解污泥’來說，也是這個比例，即 $X_D/\theta c$。這個廢棄量是每日完成的量，以連續速率表示，是 $X_D/\theta c$ (mg/l-day)。

$$d X_D/dt = -X_D/\theta c \ (\text{mg/l-day})$$

啓始條件當 $t = 0$, $X_{Do} = \omega Xo$，得

$$X_D(t) = X_{Do}\, e^{-1/\theta_c\, t}$$

$$= \omega X_o\ e^{-1/\theta_c\, t}\ (\text{mg/l}) \qquad (17)$$

式（16）與（17）相同。

連續廢棄、連續生長、及連續添加同時發生時，則

$$\frac{dX_D}{dt} = S + X_D\frac{\eta-1}{\theta_c}\quad (\text{mg/l-day}) \qquad (18)$$

如果 S normalized 為 S/θc，則為一階微分方程

$$\frac{dX_D}{dt} = X_D\frac{(\eta-1)}{\theta_c}+\frac{S}{\theta_c} \qquad (19)$$

當 t 趨近 ∞ 達平衡狀態，式（19）成為

$$\frac{dX_D}{dt} = 0 = X_D\frac{(\eta-1)}{\theta_c}+\frac{S}{\theta_c}\ ，\ X_{D平衡} = \frac{S}{(1-\eta)}\ 。 \qquad (19')$$

式（19）改寫成

$$X_D{}' + \frac{1-\eta}{\theta_c}X_D = \frac{S}{\theta_c} \qquad (20)$$

式（20）求解時可用的啓始條件有二則：（1）當 $t = 0$，$X_{Do} = \omega Xo$；（2）當 $t = 0$，$X_{Do} = \omega Xo + S$。用第 1 條件的解是

$$X_D(t) = \frac{S}{1-\eta}+\left(\omega X_o-\frac{S}{1-\eta}\right)e^{\frac{\eta-1}{\theta_c}t}\ (\text{mg/l}) \qquad (21)$$

或

$$X_D(t) = \frac{S}{1-\eta}\left(1-e^{\frac{\eta-1}{\theta_c}t}\right)+\omega X_o e^{\frac{\eta-1}{\theta_c}t}\ (\text{mg/l}) \qquad (21')$$

當 t 趨近 ∞ 達平衡狀態，指數項 $=0$，$X_{D平衡} = \frac{S}{(1-\eta)}$，

與式（19'）同。用第 2 條件的解是

$$X_D(t)=\frac{S}{1-\eta}\left(1-e^{\frac{\eta-1}{\theta_c}t}\right)+(\omega X_o+S)e^{\frac{\eta-1}{\theta_c}t}\ \text{(mg/l)} \qquad (22)$$

用第 1 啓始條件的情形是 DT 開始時並未開始添加；DT 開始之後的頃刻，所有操作及生長作用開始時立即啓動添加。這個作用之下添加物持續增加，貢獻分解污泥的保存量（含量）。用第 2 啓始條件的情形是 DT 開始之前已開始添加，啓始含量已包括 X_{Do} 及 S，再以這個總量增減。第 1 啓始條件與離散（次數）式操作（及模式）較合。

退化情勢是因馴化基質不在，原有分解能力消失。退化的簡易模式是分解污泥（X_D）的減少爲一階反應，即

$$\left.\frac{dX_D}{dt}\right|_{退化}=-\kappa X_D\ \text{(mg/l-day)} \qquad (23)$$

κ 爲退化速率常數（mg/l-t）。本式（本項）加入方程式（18）中，可得連續廢棄、連續生長、連續添加、及能力退化同時發生的模式

$$\frac{dX_D}{dt}=X_D\left[\frac{(\eta-1)}{\theta_c}-\kappa\right]+\frac{S}{\theta_c}=X_D\left[\frac{(\eta-1)-\theta_c\kappa}{\theta_c}\right]+\frac{S}{\theta_c} \qquad (24)$$

$$\frac{dX_D}{dt}+\left[\frac{1-\eta+\theta_c\kappa}{\theta_c}\right]X_D=\frac{S}{\theta_c} \qquad (25)$$

求解，條件 t = 0, X_{Do} = ωXo，得：

$$X_D(t)=\frac{S}{1-\eta+\theta_c\kappa}\left(1-e^{\left(\frac{\eta-1}{\theta_c}-\kappa\right)t}\right)+\omega X_o e^{\left(\frac{\eta-1}{\theta_c}-\kappa\right)t}\ \text{(mg/l)} \qquad (26)$$

3. 連續操作平均污泥停留時間對 X_D 的影響

連續流活性污泥處理系統是連續進流暨出流的操作；操作條件之一是污泥停留時間 θc。考慮‘真實’情況，θc 有很多可能值（進流出流是完全混合，混合中無法分出個別污泥出身之先後），污泥停留的天數有長有短。以上各方程式所表示的 θc 其實是一個平均值（θc_{mean}），其他各種不同停留時間出現的機率，應合乎某種機率分佈（distribution）。

前述的模式以 θc 爲主要（必要）參數，如果 θc 的分佈使得每個不同的 θc 分別產生不同的模式輸出，則整體效果如何加和，模式應該加以修正。

前列方程式（如式 26）各項影響分解污泥保存量的參數，如何受到不同 θc 值的影響，可從式（26）中各項與 θc 有關者逐一檢討；討論如下：

（1）指數（$\frac{\eta-1}{\theta_c}-\kappa$）部分：此項的 θc 是一個確實數字，操作作業的確可以達成的個數字，其中 -1/θc 是廢棄污泥量，在平衡狀態、攪拌均勻的情形下，廢棄的污泥中有及無能力污泥含量相等，能力有無不受污泥年齡之影響；η/θc 是分解污泥長出量，而總產出量與廢棄量同屬一個數值（見註 2），假設能力的遺傳速度快速，長出者立即具有能力，則此 η/θc 表示一個固定量的，不涉污泥年齡的內在涵義。

（2）式（26）第一項 $\frac{S}{1-\eta+\theta_c\kappa}$，表示添加量 S 累積受到生長助長及衰退牽制的情形，分母各項分別代表各種增減因素，退化 κ 是其中一項。退化程度（多寡）隨時間遞增，且作用時間緩慢，應受停留時間長短之影響。

考慮不同 θc 對退化的影響，式（26）$\frac{S}{1-\eta+\theta_c\kappa}$ 項應改寫爲

$$\frac{S}{1-\eta+\kappa\sum\theta_{ci}\times p(\theta_{ci})} \qquad (27)$$

式（27）中 $P(\theta_{ci})$ 是停留時間 θci 出現的機率，是停留（在系統中）θci 天的污泥量 Xi，佔總污泥量 X 的比例，即 $P(\theta_{ci})$ =Xi/X。式（27）的級數部分爲

$$\sum\theta_{ci}\times p(\theta_{ci})=\sum\theta_{ci}\times X_i/X=\frac{1}{X}\sum\theta_{ci}\times X_i \qquad (28)$$

根據統計學的定義，式（28）之 $\frac{1}{X}\sum\theta_{ci}\times X_i$ 爲平均數 θ_{cmean}。以連續分佈分析，本項可寫成

$$\int_{-\infty}^{\infty}\theta_c\, p(\theta_c)\,d\theta_c \qquad (29)$$

此式（29）也正是 p 函數的第一 moment，也即是平均數（mean）之意。如果 $p(\theta c)$ 機率是常態分佈（normal distribution），且常數 κ 相乘不致改變機率分佈的型狀（鐘型），則式（26）第一項係數之 θc 可以用 θc_{mean} 來代表。

活性污泥操作所指的污泥停留時間，是一表面數值；實際應用時此值常是 θc 分佈的平均值 θc_{mean}。本模式推導使用 θc_{mean}，而實際操作下，各別污泥所感受到的停留時間與此數值可能有所差異。根據以上討論，本文之模式應用 θc_{mean} 作爲代表值，仍可以摒除這個疑慮。

三、討論

活性污泥對持久性有機物的分解，有其生化的複雜度與困難度；科學家應用這個難得的功能因此也必須面對許多問題。其中馴化與退化，與日興衰，加上實際操作系統也有其複雜度，有關分解能力的諸多問題必須一一加以克服。本研究就分解能力在連續流活性污泥系統中的多項可能興衰情形，作成必要之數學模式。有了這些數學模式，相關之實驗如何設計，方能得到指引；反之，在良好實驗實測之下，數學模式之相關參數可加以測定。

本模式輸出的一則例子，如圖 2 所示。本計算例是以廢棄、生長及添加模式，有無退化現象，並用離散式及連續式時間爲變數，計算有分解能力污泥的保存量。離散式及連續式模式（式（11）對式（21））輸出結果，在實際應用的意義上，相差極少；包括退化條件者（式（14）對式（26））亦然。如何選擇其中一者端看實際操作作業而定。

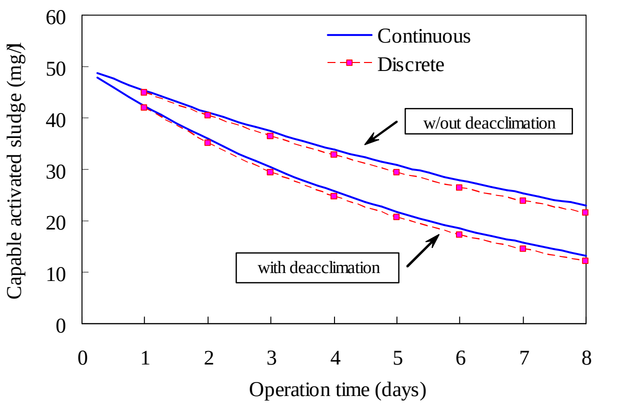

圖 2.　分解污泥保存量數學模式試算例（計算用參數：θc =8 days, S = 0.22 /θc mg/l-d , η = 0.1, X_{D_0} 50.0 mg/l, κ = 0.069 mg/l-d (半衰期=10 days)）

圖 2 曲亦表達添加在實際操作的意義。當 DT 無限延長時，分解污泥濃度趨近於添加值 S。經過長時的 DT 持久污染物不進流的情況下，若此時有突發性的進流，系統的處理能力得依賴添加來保持。而在 DT 較短的時間，則添加並非主要的能力來源，添加所需的費用，並不具有較大的效益。本模式可應用於添加的邊際效益分析。

本模式對於活污泥分解能力衰退的表述，極臻完善。運用這些模式可以用數字方式表現出本系統的機制（即如圖 1 構想）。其他有關馴化機制更深入之思考，如分解能力之橫向傳遞等，也可由這個基礎上發展。

參考文獻

1. 董瑞安、吳先琪（民 82），微生物生長型態及基質種類對四氯化碳生物轉換之影響，中國環境工程學刊，3(2)，83-90。
2. Adrien, N. G. (1998) Derivation of mean cell residence time formula. *Journal of Environmental Engineering*, 124(5), 473-474.
3. Alexander, M. (1973) Non-biodegradable and other recalcitrant molecules. *Biotechnology and Bioengineering*, 15, 6-11.
4. Chong, N.-M. (2005) Development of a tool for measurement of the degradation capacity of a biomass for a xenobiotic. *Enzyme and Microbial Technology*, 37(5), 467-471.
5. Lawrence, A. W. and P. L. McCarty (1970) Unified basis for biological treatment design and operation. *Journal of Sanitary Engineering Division, ASCE*, 96(3), 757-778.
6. Slater, J. and A. T. Bull (1982) Environmental microbiology: Biodegradation. *Philosophical Transactions of the Royal Society London*, B.297, 575-587.
7. Wiggins, B. A., S. H Jones and M. Alexander (1986) Explanations for the acclimation period preceding the mineralization of organic chemicals in aquatic environments. *Applied and Environment Microbiology*, 53, 791-796.

收件：**94.02.21**　修正：**94.05.30**　接受：**94.09.28**