

年齡回溯法下生命週期內租賃設備最佳維修策略與租賃長度

張文亮^{1*} 葉瑞徽²

¹ 耕莘健康管理專科學校資訊管理科

23143 新北市新店區民族路 112 號

² 國立臺灣科技大學工業管理系

10607 臺北市大安區基隆路四段 43 號

摘要

本論文主要研究探討年齡回溯法下設備生命週期內之最佳維修策略與租賃長度。出租者與承租者在簽訂設備租賃契約條款時的重要項目包含設備的維修保養服務、設備租金與租期長度等。一般而言，設備的租賃契約中會明訂出租者須負擔的維修責任、承租者所能容忍的設備故障維修時間及出租者維修逾時的懲罰性賠償等。對於租賃設備的整體支出與收入，設備的預防保養執行可有效的降低設備的故障次數並減少支出成本，租賃設備的租期長度則是出租者的主要收入。有鑑於此，本論文以出租者立場針對可維修的租賃設備，考慮租期內設備故障時採小修方式處理，引進週期性預防保養策略並加入出租設備可得之收入，建構出設備在租期內整體總利潤的數學模式。依據建構之利潤模式尋求最佳預防保養策略與租期長度，並以數值分析結果說明最佳預防保養策略與租期長度對利潤模式之影響。

關鍵詞：週期性預防保養，租期長度，設備生命週期。

Optimal Maintenance Policy and Length of the Lease Period for Leased Equipment Using Age-reduction Within the Lifecycle

WEN-LIANG CHANG^{1*} and RUEY-HUEI YEH²

¹ Department of Information Management, Cardinal Tien Junior College of Healthcare & Management, 112, MinZu, Rd., SinDian City, Taipei, 23143, Taiwan, R.O.C.

² Department of Industrial Management, National Taiwan University of Science and Technology, No. 43, Sec. 4, Keelung Rd., Taipei, 10607, Taiwan, R.O.C.

ABSTRACT

This paper examines preventive maintenance policies and the optimal length of a lease period from the lessor's perspective. The length of the lease period, the repair time of the failed equipment, and rent for the leased equipment are detailed in the lease contract. To achieve steady revenue, the lessor may provide a discount to encourage the lessee to sign a contract with a long lease period. For the lessor, determining the frequency of preventive maintenance and the length of the lease period is

crucial. Therefore, we consider the following maintenance scheme in this study. Within the lease period, all equipment failures are repaired minimally. A repair time that exceeds a prespecified tolerable time results in a penalty to the lessor. Within the lease period, the lessor preventively maintains the equipment periodically. Based on this maintenance scheme, a mathematical model of the expected total profit for the equipment within the lease period is developed and the optimal length of the lease period and corresponding optimal maintenance policy are determined. Finally, we provide numerical examples to illustrate the effects of the lease period length and the maintenance policy on the expected total profit.

Key Words: periodical preventive maintenance, length of lease periods, product lifecycle.

一、前言

在全球提倡與推動綠色環保之觀念下，產業界購買昂貴的設備來生產產品已不符經濟效益。產業界近年以租賃設備方式來取代購買 (Desai and Purohit, 1998) 以減少支出成本。有鑑於此，專業租賃設備的商業型態便開始慢慢的蓬勃發展。對於租賃設備，租賃公司 (出租者) 與公司企業 (承租者) 依據租賃設備之功能特性來擬定設備的租賃契約內容。而契約內容主要包含租金、設備租期長度、設備故障時的維修處理方式與故障維修時限，以及維修逾時的懲罰賠償等等。一般來說，可維修設備在故障狀態已知的情況下，維修策略有小修、預防保養、不完美維修和置換。可維修設備其維修方式主要分為二種：矯正性維修與預防保養。矯正性維修是將設備由故障狀態維修至正常運作狀態。預防保養是改善正常運作中設備之狀況。

在矯正性維修方式中，設備最常被使用小修方式來恢復故障設備至正常運作。設備故障小修處理方式之概念最早來自於 Barlow 與 Hunter [1]。所謂「小修」係指設備故障時經維修後設備恢復正常運作但其失效率與故障前之失效率維持相同。有關小修的論文可參見 Nakagawa and Kowada [6] 和 Tilquin and Cleroux [9]。在設備預防保養方面，預防保養策略可區分為週期性與非週期性，以及完美與不完美預防保養。Nakagawa [5] 提出以故障率降低法與年齡回溯法來描述設備不完美預防保養策略之行爲。所謂「故障率降低法」是指設備經保養後，其設備失效率降低，而後失效率隨時間快速遞增。而「年齡回溯法」係指設備經保養後，其保養程度視為設備壽命可年輕的程度。Pham 與 Wang [8] 假設故障設備在不完美預防保養情況下，以年齡回溯法來建構設備的維修成本模式並進一步求得最佳的預防保養策略。Yeh 與 Lo [14] 以主動式的預防保養保證策略，考慮預防保養的成本會隨保養程度之不同而變動，以及在非週期性預防保養的

情況下，產品的最佳預防保養策略之決定。至於其它不完美的預防保養方法之描述可參見 Jack 與 Dugpunar [3] 和 Pham 與 Wang [8] 的論文。

有關租賃設備的維修策略之研究，至目前為止僅有極少數文獻 [2, 4, 7, 10-13] 將上述的維修策略應用在租賃設備上。因此，本論文以出租者為立場，利用週期性預防保養之年齡回溯法來建構設備在租期內期望總利潤的數學模式，並進一步求得最佳租期長度與預防保養策略。

二、利潤模式建構

假設出租者購買設備的價格為 V ，出租者與承租者簽訂設備的租賃契約時，其設備之租賃長度為 L 。在租賃期內，考慮設備故障時以小修方式處理且小修後失效率維持與設備故障前一樣。設備每次故障帶來的維修成本為 C_m 。假設設備故障維修時間為一隨機變數 t_r 且其累積分配函數為 $G(t_r)$ 。若設備維修時間超過 τ 值時，則出租者給予承租者適當的賠償金 C_r ，設備維修逾時發生的機率為 $\bar{G}(\tau) = 1 - G(\tau)$ 。在租賃期內，除故障時小修處理外，為減少故障發生次數，出租者以週期性方式為設備實施 n 次不完美的預防保養，每次實施預防保養的時間間隔距離為 $T_n = L/(n+1)$ ，即出租者在時間點 $iT_n, i = 1, 2, \dots, n$ 為設備實施預防保養，預防保養的方法是採年齡回溯法且其保養程度皆相同為 x ，即每次實施預防保養後設備年齡比未保養前年輕 x 單位的時間。每次執行預防保養帶來的成本為 $C_p(x)$ 且假設預防保養時間忽略不計。因設備故障時以小修方式處理且小修後失效率維持與設備故障前一樣，可知設備的故障過程為非齊次波瓦松過程 (Non-homogeneous Poisson Process)。假設 $f(t)$ 為設備壽命分配， $h(t)$ 及 $H(t)$ 為

設備之失效率函數與累積失效率函數。\$f(t)\$、\$h(t)\$ 及 \$H(t)\$ 之關係為 \$h(t)=f(t)/[1-F(t)]\$，\$F(t)=\int_0^t f(u) du\$ 與 \$H(t)=\int_0^t h(u) du\$。在租賃期 \$L\$ 內，出租者以週期性方式為設備實施 \$n\$ 次不完美的預防保養，在第一個區間 \$[0, T_n]\$ 的失效率為 \$h(t)\$，其期望小修次數為 \$\int_0^{T_n} h(t) dt\$。在第二個區間 \$[T_n, 2T_n]\$，因在時間點 \$T_n\$ 實施 \$x\$ 程度的年齡回溯法之預防保養，故在區間 \$[T_n, 2T_n]\$ 中的失效率為 \$h(t-x)\$，其期望小修次數為 \$\int_{T_n}^{2T_n} h(t) dt\$。以此類推，在預防保養的時間間隔 \$[iT_n, (i+1)T_n]\$ 內之期望小修的次數為 \$\int_{iT_n}^{(i+1)T_n} h(t-ix) dt, i=0,1,\dots,n\$，即在租賃期內期望小修的次數為

$$N(L) = \sum_{i=0}^n \int_{iT_n}^{(i+1)T_n} h(t-ix) dt \quad (1)$$

$$= \sum_{i=0}^n \left[H\left(\frac{(i+1)L}{n+1} - ix\right) - H\left(\frac{iL}{n+1} - ix\right) \right].$$

令 \$TC\$ 為總支出成本，因此在租賃期間內期望總支出成本為

$$E[TC] = V + [C_m + C_r \bar{G}(\tau)] N(L) + \sum_{i=1}^n C_p(x). \quad (2)$$

假設出租者與承租者在訂立租賃契約時，設備每單位租賃長度的租金為 \$R\$。若承租者連續租賃該設備 2 期（含）以上，則每單位租賃長度的優惠率為 \$\phi\$（\$0 < \phi < 1\$）。令 \$TR\$ 為總收益，考慮設備連續租賃有折扣的情況下，設備租期內之期望總收益為

$$TR = R(1 + \phi + \phi^2 + \dots + \phi^{L-1}) = R \left(\frac{1 - \phi^L}{1 - \phi} \right). \quad (3)$$

令 \$TP\$ 為總利潤，因此設備在租賃期間之期望總利潤為

$$E[TP] = TR - E[TC] = R \left(\frac{1 - \phi^L}{1 - \phi} \right) - V - A \times N(L) - nC_p(x), \quad (4)$$

其中 \$A = [C_m + C_r \bar{G}(\tau)]\$。

本論文將針對式子（4）中的決策變數 \$(n, x, L)\$，尋求其最佳維修策略 \$(n^*, x^*)\$ 與最佳租賃長度 \$L^*\$ 使其設備在出租期限內之期望總利潤為最大並分析預防保養次數、保養程度與租賃長度在租賃契約中對總利潤模式之影響。

三、最佳維修策略與租期長度

首先針對式子（4）中決策變數 \$x\$ 作一階與二階的偏微分，可得結果為

$$\frac{\partial E[TP]}{\partial x} = A \sum_{i=0}^n \left[ih \left(\frac{(i+1)L}{n+1} - ix \right) - ih \left(\frac{iL}{n+1} - ix \right) \right] - nC_p'(x) \quad (5)$$

與

$$\frac{\partial^2 E[TP]}{\partial x^2} = -A \sum_{i=0}^n \left[i^2 h' \left(\frac{(i+1)L}{n+1} - ix \right) - i^2 h' \left(\frac{iL}{n+1} - ix \right) \right] - nC_p''(x) \quad (6)$$

若租賃設備的失效率函 \$h(t)\$ 為嚴格遞減，可得 \$\partial E[TP] / \partial x < 0\$，即期望總利潤 \$E[TP]\$ 為保養程度 \$x\$ 的遞減函數。由限制式 \$0 \le x \le L / (n+1)\$，可知當 \$x = 0\$，所得期望總利潤 \$E[TP]\$ 為最大。因此可知，設備在租期 \$L\$ 內不需進行任何預防保養的動作，即 \$n = 0\$ 且總利潤為 \$E[TP] = R(1 - \phi^L) / (1 - \phi) - V - A \times H(L)\$。若租賃設備的失效率函數為嚴格遞增，檢視式子（4）後，可得定理 1 的結果。

定理 1. 當 \$C_p''(x) \ge 0, \forall x\$，在給定 \$L, n > 0\$ 下，則下列結果會成立。

$$(a) \text{ 若 } A \sum_{i=0}^n \left[ih \left(\frac{(i+1)L}{n+1} - ix \right) - ih \left(\frac{iL}{n+1} - ix \right) \right] \le nC_p'(0), \text{ 則}$$

$$x^* = 0.$$

$$(b) \text{ 若 } \frac{An(n+1)}{2} h\left(\frac{L}{n+1}\right) \ge nC_p'\left(\frac{L}{n+1}\right), \text{ 則 } x^* = \frac{L}{n+1}.$$

(c) 若 $A \sum_{i=0}^n \left[ih \left(\frac{(i+1)L}{n+1} - ix \right) - ih \left(\frac{iL}{n+1} - ix \right) \right] > nC'_p(0)$

且 $\frac{An(n+1)}{2} h \left(\frac{L}{n+1} \right) < nC'_p \left(\frac{L}{n+1} \right)$ ，則存在唯一的最佳保

養程度 $x^* \in (0, L/(n+1))$ 使得 x^* 滿足式子 (5) 等於零且期望總利潤為最大。

證明：當 $C''_p(x) \geq 0$ 時，則可知 $\partial^2 E[TP] / \partial x^2 < 0$ ，即 $\partial E[TP] / \partial x$ 為 x 的遞減函數。由限制式 $0 \leq x \leq L/(n+1)$ ，可知將 $x = 0$ 與 $x = L/(n+1)$ 代入式子 (5) 可得結果為

$$\left. \frac{\partial E[TP]}{\partial x} \right|_{x=0} = A \sum_{i=0}^n \left[ih \left(\frac{(i+1)L}{n+1} \right) - ih \left(\frac{iL}{n+1} \right) \right] - nC'_p(0)$$

與

$$\left. \frac{\partial E[TP]}{\partial x} \right|_{x=L/(n+1)} = \frac{An(n+1)}{2} h \left(\frac{L}{n+1} \right) - nC'_p \left(\frac{L}{n+1} \right)。$$

(a) 若 $A \sum_{i=0}^n \left[ih \left(\frac{(i+1)L}{n+1} - ix \right) - ih \left(\frac{iL}{n+1} - ix \right) \right] \leq nC'_p(0)$ ，則可知

$\partial E[TP] / \partial x|_{x=0} \leq 0$ 。因 $\partial E[TP] / \partial x$ 為 x 的遞減函數，故可得 $\partial E[TP] / \partial x \leq 0$ ，即期望總利潤 $E[TP]$ 為 x 的遞減函數。由限制式 $0 \leq x \leq L/(n+1)$ ，可得最佳保養程度為 $x^* = 0$ 。

(b) 若 $\frac{An(n+1)}{2} h \left(\frac{L}{n+1} \right) \geq nC'_p \left(\frac{L}{n+1} \right)$ ，則可知

$\partial E[TP] / \partial x|_{x=L/(n+1)} \geq 0$ 。因 $\partial E[TP] / \partial x$ 為 x 的遞減函數，

故可得 $\partial E[TP] / \partial x \geq 0$ ，即期望總利潤 $E[TP]$ 為 x 的遞增函數，可得最佳保養程度為 $x^* = L/(n+1)$ 。

(c) 若 $A \sum_{i=0}^n \left[ih \left(\frac{(i+1)L}{n+1} - ix \right) - ih \left(\frac{iL}{n+1} - ix \right) \right] > nC'_p(0)$

且 $\frac{An(n+1)}{2} h \left(\frac{L}{n+1} \right) < nC'_p \left(\frac{L}{n+1} \right)$ ，可知 $\partial E[TP] / \partial x|_{x=0} > 0$

且 $\partial E[TP] / \partial x|_{x=L/(n+1)} < 0$ 。因 $\partial E[TP] / \partial x$ 為 x 的遞減函數，所以 $\partial E[TP] / \partial x$ 的值在區間 $(0, L/(n+1))$ 由正變負，故存在唯一的最佳保養程度 $x^* \in (0, L/(n+1))$ 使得期望總利潤為最大。最佳保養程度可由下列式子

$$A \sum_{i=0}^n \left[ih \left(\frac{(i+1)L}{n+1} - ix^* \right) - ih \left(\frac{iL}{n+1} - ix^* \right) \right] - nC'_p(x^*) = 0 \text{ 求得。}$$

定理 1 (a) 的結果說明當設備的維修相關成本較小 (即小於 $nC'_p(0)$) 時，則設備在租賃期間不需進行任何保養動作。(b) 與 (c) 的結果說明當維修相關成本較大 (即大於 $nC'_p(0)$) 時，則設備在租賃期間需要做保養，以降低設備故障次數，減少維修的支出成本。

至於設備最佳保養次數與租期長度是由於設備的生命週期 t_d 及設備維修時間要求小於或等於維修時間容忍值 τ 來決定。因此，可得預防保養次數與租期長度的限制式分別為 $0 \leq n\tau \leq t_d$ 與 $0 \leq L \leq t_d$ ，由此可知，保養次數 n 與租期長度 L 的上限值分別為 $\bar{n} = \lfloor t_d / \tau \rfloor$ 與 t_d 。一般來說，保養次數 n 與租期長度 L 均為整數值，因此可以利用列舉搜尋法在 $[0, \bar{n}]$ 與 $[0, t_d]$ 得到最佳的保養次數 n^* 與租期長度 L^* 。本論文不考慮設備壽命結束於租賃到期前 (即限制式 $0 \leq t_d \leq L$) 的情況下，此情況會使出租者付出更龐大的維修或置換設備的成本，故出租者不會在此情況下出租設備。由定理 1 與上述結果，可得設備的最佳預防保養策略與租期長度，並使其出租設備所獲得之利潤為最大。

四、數值分析

假設出租者購買新設備的成本為 $V = 300$ ，設備每單位租賃長度的租金為 $R = 1000$ ，已知租賃設備之壽命週期 $t_d = 10$ 。假設設備壽命服從韋伯分配，其機率密度函數為 $f(t) = \lambda\beta(\lambda t)^{\beta-1} e^{-(\lambda t)^\beta}$ ， $t \geq 0$ ，尺度

參數為 λ ，形狀參數為 $\beta = 2.5$ 。因此可知，失效率函數為 $h(t) = \lambda\beta(\lambda t)^{\beta-1}$ 且設備的平均壽命為 $\mu = (1/\lambda)\Gamma(1/\beta+1)$ 。設備每次實施預防保養的程度為 x 單位且成本為 $C_p(x) = 5 + bx$ 。假設承租者連續租賃該設備，則每單位租賃長度以折扣率 $\phi = 0.9$ 優惠。在不同的尺度參數 ($\lambda=1, 1.5$)、預防保養之變動成本 ($b=100, 130, 150, 170$) 與維修及懲罰成本 ($A=25, 35$) 的組合下，依據第三節最佳維修策略與租期長度所推導出的最佳策略性質及求得之最佳租賃期長度 (L^*)、保養次數 (n^*)、保養程度 (x^*) 和最大利潤 ($\max E[TP]$) 的結果列於表 1 與表 2 中。

由表 1 可知，在 $\lambda=1.5$ 與 $A=25$ 的情況下，當預防保養的邊際成本 $b=150$ 時，設備的最佳租期為 $L^*=3$ 。出租者不實施預防保養的情況下，即保養次數為 $n=0$ ，所以在租賃期 L 內的維修費用為 $A \times H(L)$ ，因此沒有預防保養的總利潤可利用 $E[TP] = R(1 - \phi^L)/(1 - \phi) - V - A \times H(L)$ 計算得到 1336。出租者若實施預防保養，則最佳的預防保養次數為 $n^*=8$ ，最佳的保養程度為 $x^*=0.3$ ，所獲得的期望總利潤為 1923。表 1 與表 2 中的數據呈現的結果如下：

- (1) 當設備壽命分配的尺度參數 λ 由 1.5 改變為 1 時（即設備的平均壽命由 0.6 增加為 0.9），設備租賃期長度為遞增的。
- (2) 設備在有執行預防保養的情況下所獲得的利潤比沒有實施預防保養所獲得的利潤為高。

五、結論

本論文是以出租者的立場，將週期性預防保養引進於租賃契約中並建構設備於租賃期間內之總利潤數學模式，並進一步尋求最佳預防保養策略與設備租期長度的相關性質，以利出租者在制訂設備租賃契約時之參考。在研究過程中，發現設備租賃期長度的決策受設備的可靠度所影響，而設備出租所獲得利潤之高低取決於預防保養的執行與否。因此，出租者在制訂設備的租賃契約時，可依設備的可靠度特性來制訂設備的租賃長度與預防保養策略以獲取最大的利潤。未來的研究方向可朝向將週期性預防保養策略修改為非週期性預防保養策略，並進一步將保養程度修改為非固定值，此未來之研究將更接近租賃設備的實務狀況，並讓出租者可以有另一個策略的選擇。

表 1. 在 $\lambda=1.5$ 下之最佳策略與總利潤

$\lambda=1.5, A=25$					
b	L^*	n^*	x^*	無預防保養 $E[TP]$	有預防保養 $E[TP]$
100	2	5	0.3	1210	1383
130	2	3	0.4	1210	1347
150	3	8	0.3	1336	1923
170	3	6	0.4	1336	1888
$\lambda=1.5, A=35$					
b	L^*	n^*	x^*	無預防保養 $E[TP]$	有預防保養 $E[TP]$
100	1	1	0.4	603	628
130	2	8	0.2	1054	1308
150	2	5	0.3	1054	1291
170	2	5	0.3	1054	1261

表 2. 在 $\lambda=1$ 下之最佳策略與總利潤

$\lambda=1, A=25$					
b	L^*	n^*	x^*	無預防保養 $E[TP]$	有預防保養 $E[TP]$
100	4	6	0.5	2339	2720
130	5	7	0.6	2398	3136
150	6	10	0.5	2181	3449
170	6	7	0.7	2181	3365
$\lambda=1, A=35$					
b	L^*	n^*	x^*	無預防保養 $E[TP]$	有預防保養 $E[TP]$
100	3	6	0.4	1864	2098
130	4	8	0.4	2019	2593
150	5	10	0.4	1839	2984
170	5	8	0.5	1839	2917

誌謝

國科會補助計畫：NSC 100-2221-E-011-081-MY3。

參考文獻

1. Barlow, R. E. and L. C. Hunter (1960) Optimum preventive maintenance policies. *Operations Research*, 8, 90-100.
2. Desai, P. and D. Purohit (1998) Leasing and selling: optimal marketing strategies for a durable goods firm. *Management Science*, 44, 19-34.
3. Jack, N. and J. S. Dagnunar (1994) An optimal imperfect maintenance policy over a warranty period. *Microelectronics and Reliability*, 34, 529-534.

4. Jaturonnate, J., D. N .P. Murthy and R. Boondiskulchok (2006) Optimal preventive maintenance of leased equipment with corrective minimal repairs. *European Journal of Operational Research*, 174, 201-215.
5. Nakagawa, T. (1979) Imperfect preventive maintenance. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 24, 213-227.
6. Nakagawa, T. and M. Kowada (1983) Analysis of a system with minimal repair and its application to replacement policy. *European Journal of Operational Research*, 12, 176-182.
7. Pongpech, J. and D. N .P. Murthy (2006) Optimal periodic preventive maintenance policy for leased equipment. *Reliability Engineering and System Safety*, 91, 772-777.
8. Pham, H. and H. Wang (1996) Invited review—imperfect maintenance. *European Journal of Operational Research*, 94, 425-438.
9. Tilquin, C. and R. Cleroux (1975) Periodic replacement with minimal repair at failure and general cost function. *Journal of Statistical Computing and Simulation*, 4, 63-67.
10. Yeh, R. H. and W. L. Chang (2007) Optimal threshold value of failure-rate for leased products with preventive maintenance actions. *Mathematical and Computer Modelling*, 46, 730-737.
11. Yeh, R. H., W. L. Chang and H. C. Lo (2011) Optimal length of lease period and maintenance policy for leased equipment with a control-limit on age. *Mathematical and Computer Modelling*, 54, 2014-2019.
12. Yeh, R. H. and C. K. Chen (2006) Periodical preventive-maintenance contract for a leased facility with weibull life-time. *Quality and Quantity*, 40, 303-313.
13. Yeh, R. H., K. C. Kao and W. L. Chang (2009) Optimal preventive maintenance policy for leased equipment using failure rate reduction. *Computers and Industrial Engineering*, 57, 304-309.
14. Yeh, R. H. and H. C. Lo (2001) Optimal preventive-maintenance warranty policy for repairable products. *European Journal of Operational Research*, 134, 59-69.

收件：102.08.23 修正：102.09.24 接受：102.12.30