Journal of Science and Engineering Technology, Vol. 9, No. 1, pp. 53-58 (2013)

生產設備之最佳置換時程對利潤之影響

張文亮 [1*]　葉瑞徽 [2]　宋瑋婷 [2]
[1] 耕莘健康管理專科學校資訊管理科
23143 新北市新店區民族路 112 號
[2] 國立臺灣科技大學工業管理系
10607 臺北市大安區基隆路 4 段 43 號

摘　要

隨著科技日新月異，設備的保證契約成爲賣方的行銷策略之一。本論文研究具免費維修保固的生產設備之最佳置換時程對利潤之影響。對於具有免費維修保固之設備，當設備於免費維修保固期內發生故障，則賣方(製造商)必須負擔維修成本，買方需負擔設備因故障而停止生產所帶來的損失成本。然而，當設備故障發生於免費維修保固期後，則買方需負擔設備的維修成本與故障停止生產的損失成本。本論文以買方爲立場，在設備故障率隨時間遞增的情況下，建構出三種生產設備保固期長度與置換時程的期望總利潤模式並尋求設備的最佳置換時程，最後以數值範例分析說明在有限時程下，設備的置換時程對總利潤的影響。

關鍵詞：設備置換，免費維修保固，生產函數，小修策略

The Influences of the Optimal Replacement Times of Production Equipment for Profit

WEN LIANG CHANG[1*], **RUEY HUEI YEH**[2] and **WEI-TING SUNG**[2]
[1] *Department of Information Management, Cardinal Tien Junior College of Healthcare & Management*
112, MinZu, Rd., XinDian Dist., New Taipei City, 23143, Taiwan, R.O.C.
[2] *Department of Industrial Management, National Taiwan University of Science and Technology*
No. 43, Sec. 4, Keelung Rd., Taipei City, 10607, Taiwan, R.O.C.

ABSTRACT

This study investigates the influences of optimal replacement time for the production of equipment for profit. For the products with free-repair warranties (FRW), when the equipment fails within the FRW, it is corrected using minimal repair without cost to the buyer. Fallowing FRW, any failure of the equipment incurs a fixed repair cost to the buyer. However, each failure incurs a fixed downtime cost to the buyer. Under this maintenance scheme, the replacement of the production equipment is investigated for two separate cases: before FRW and following FRW. Next, three profit models using a buyer’s perspective are derived, and the optimal replacement time is obtained, maximizing the expected total profit. Finally, numerical examples are provided to illustrate the features of the proposed optimal replacement time.

***Key Words*:** replacement, free-repair warranty, production function, minimal repair

一、前言

在競爭激烈的產品銷售市場中，如何不斷的生產提供商品是企業必須考量的要素之一。一般來說，企業購買的生產設備皆附有保固期限。設備的保固期長度影響設備使用時發生故障所需負擔的維修成本，因此企業必須在設備的使用時程內規劃設備的維修策略。對於設備的故障實施的維修策略可分爲故障置換、小修及不完美維修。小修概念最早源自於 Barlow 與 Hunter[4]所提出的設備故障的「小修」維修成本架構。所謂「小修」是指系統或設備故障經修理後的失效率和故障前之失效率維持相同。Chen 與 Feldman[7]假設運作成本爲系統年齡的非遞減函數，設備故障時以置換或小修處理，並制定出一個馬可夫決策過程。Sheu 與 Griffith[12]考慮設備故障以小修處理的年齡置換策略，導出設備的維修成本模式，進一步求得最佳的置換策略。爾後，小修策略已被廣泛的應用在設備或產品的維修策略上[1,2,6,8]。

有關設備保證與置換之研究，Blischke & Murthy[5]對於產品的保證成本有詳細分析與討論。潘嘉良[3]考慮二階段的產品保證模型。第一階段時間區間爲[0,*w*]，第二階段時間區間爲(*w*,*T*+*w*]。產品失效分爲輕微失效(型 1)與嚴重失效(型 2)。假設型 1 發生以小修處理，型 2 發生以置換處理，並推導出其維修保證成本模式，進一步獲得在產品保證下的最佳維修置換策略。Osaki[10]針對可維修設備，建構出設備的年齡及區間置換的維修成本模式。1997 年 Sheu[11]探討產品在停機下的區間置換策略對成本模式的影響。Nakagawa 與 Mizutani[9]研究在有限時程下使用設備，建構出具有小修、區間置換與簡易置換三種週期性的模式並進一步求得最佳置換策略。

本論文以買方爲立場，在設備故障率隨時間遞增及有限時程使用設備的情況下，建構出三種生產設備保固期長度與置換時程的期望總利潤模式並尋求設備的最佳置換時程，最後以數值範例分析說明在有限時程下，設備的置換時程對總利潤的影響。

二、模式建構

本論文以買方立場考慮在有限時程 T 內使用固定品牌的生產設備。假設生產設備購買時附有免費維修保固期 w ，設備初購價格爲 V ，設備的生產函數爲遞減函數 $g(t)$ (不考慮存貨，閒置及持有成本)，設備生產的產品每個售價爲 M 。假設設備的故障率函數 $h(t)$ 爲嚴格遞增且累積故障率函數爲 $H(t)=\int_0^t h(u)\,du$ 。當設備於保固期 w 內故障，賣方以小修方式處理且小修後設備的故障率維持不變。當設備在保固期後故障，每次故障買方需負擔設備的維修費用爲 C_m 。在設備使用時程 T 內，設備每次故障買方所需負擔因故障而停止生產的損失成本爲 C_d 。設備在長期的使用下故障率遞增導致故障次數增加造成買方停止生產的損失成本增加，因此，買方計畫在時間 s 進行生產設備的置換。設備在有限時程 T 內的置換維修策略，如圖 1 所示。

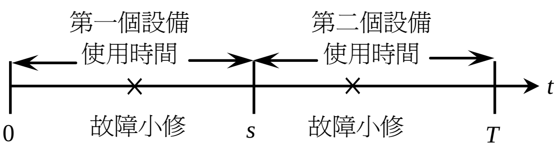

圖 1 設備的置換維修模式

假設設備的維修與置換時間相對於整個使用時間 T 可忽略不計。因設備故障時以小修方式處理且小修後設備故障率維持不變，可知設備的故障過程爲非齊次波瓦松過程。因此可知，第一個與第二個設備的期望小修次數分別爲 $H(s)=\int_0^s h(t)\,dt$ 與 $H(T-s)=\int_0^{T-s} h(t)\,dt$ 。考慮在 $2w\le T$ 的情況下，設備的置換策略可分爲下列三種狀況：(i) $0\le s\le w$ ，(ii) $w\le s\le T-w$ 及(iii) $T-w\le s\le T$ 。以下將針對三種狀況進行利潤模式建構。

(一) 狀況(i)： $0\le s\le w$

設備於保固期 w 內置換模式，如圖 2 所示。由圖 2 可知，因設備在保固期內置換，所以第一個設備在使用時間 s 內只需負擔停機的損失成本 $C_d\int_0^s h(t)\,dt=C_d H(s)$ 。第二個設備在使用時間 $T-s$ 內故障所需負擔的小修成本爲 $C_m\int_w^{T-s} h(t)\,dt=C_m[H(T-s)-H(w)]$ ，停機的損失成本爲 $C_d\int_0^{T-s} h(t)\,dt=C_d H(T-s)$ 。

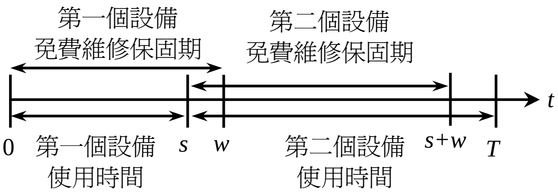

圖 2 在 $0 \le s \le w$ 下設備的置換維修模式

因此，買方在時程 T 內使用設備的期望總支出成本為

$$ETC_1 = 2V + C_d[H(T-s)+H(s)] + C_m[H(T-s)-H(w)]$$

由設備的生產函數為 $g(t)$，可知第一個與第二個設備在使用時間 s 與 $T-s$ 內的產品販售收入分別為 $M\int_0^s g(t)\,dt = MG(s)$ 與 $M\int_0^{T-s} g(t)\,dt = MG(T-s)$。因此，買方在時程 T 內使用設備的期望總收入為

$$ETP_1 = MG(s) + MG(T-s) = M[G(s)+G(T-s)]$$

由上述可知，買方的期望總利潤為

$$\begin{aligned} ETR_1 &= ETP_1 - ETC_1 \\ &= M[G(s)+G(T-s)] - 2V - C_d[H(T-s)+H(s)] \qquad (1) \\ &\quad - C_m[H(T-s)-H(w)] \end{aligned}$$

(二) 狀況(ii)： $w \le s \le T-w$

設備於保固期 w 後置換模式，如圖 3 所示。由圖 3 可知，第一個設備在使用時間 s 內所需負擔的小修成本與停機的損失成本分別為 $C_m\int_w^s h(t)\,dt = C_m[H(s)-H(w)]$ 與 $C_d\int_0^s h(t)\,dt = C_dH(s)$。第二個設備在使用時間 $T-s$ 內所需負擔的小修成本與停機的損失成本分別為 $C_m\int_w^{T-s} h(t)\,dt = C_m[H(T-s)-H(w)]$ 與 $C_d\int_0^{T-s} h(t)\,dt = C_dH(T-s)$。

因此，買方在時程 T 內使用設備的期望總支出成本為

$$ETC_2 = 2V + C_d[H(T-s)+H(s)] + C_m[H(T-s)+H(s)-2H(w)]$$

買方的期望總利潤為

$$\begin{aligned} ETR_2 &= ETP_1 - ETC_2 \\ &= M[G(s)+G(T-s)] - 2V - C_d[H(T-s)+H(s)] \qquad (2) \\ &\quad - C_m[H(T-s)+H(s)-2H(w)] \end{aligned}$$

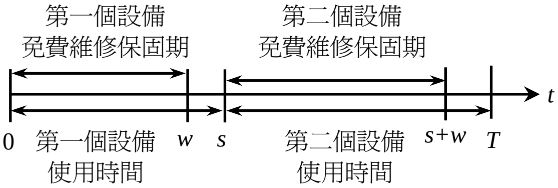

圖 3 在 $w \le s \le T-w$ 下設備的置換維修模式

(三) 狀況(iii)： $T-w \le s \le T$

設備在 $T-w \le s \le T$ 下的置換模式，如圖 4 所示。由圖 4 可知，第一個設備在使用時間 s 內所需負擔的小修成本與停機的損失成本如狀況(ii)。第二個設備在使用時間 $T-s$ 內只需負擔停機的損失成本 $C_d\int_0^{T-s} h(t)\,dt = C_dH(T-s)$。

因此，買方在時程 T 內使用設備的期望總支出成本為

$$ETC_3 = 2V + C_d[H(T-s)+H(s)] + C_m[H(s)-H(w)]$$

買方的期望總利潤為

$$\begin{aligned} ETR_3 &= ETP_1 - ETC_3 \\ &= M[G(s)+G(T-s)] - 2V - C_d[H(T-s)+H(s)] \qquad (3) \\ &\quad - C_m[H(s)-H(w)] \end{aligned}$$

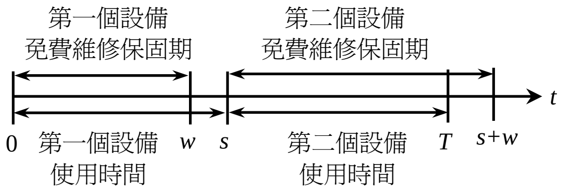

圖 4 在 $T-w \le s \le T$ 下設備的置換維修模式

本研究的目的是針對式子(1)-(3)的利潤模式中決策變數 s 尋求最佳解，使得買方在設備規劃使用時程 T 內獲得的期望總利潤最大。

三、最佳置換時間

我們將依據第二節所建構出三種狀況的利潤模式尋求生產設備之最佳置換時程，使得生產設備在使用時間內可獲得最大的利潤。

(一) 狀況(i)的最佳置換時間： $0 \le s \le w$

首先，針對式子(1)的利潤模式中的設備置換時程 s，進行一階與二階微分可得

$$\frac{dETR_1}{ds} = M[g(s)-g(T-s)] + C_d[h(T-s)-h(s)] + C_mh(T-s) \qquad (4)$$

與

$$\frac{d^2ETR_1}{ds^2} = M[g'(s)+g'(T-s)] - C_d[h'(T-s)+h'(s)] - C_mh'(T-s) \qquad (5)$$

檢視式子(4)，可得定理 1 的結果。

定理 1 當 $h'(t) > 0$ 且 $g'(t) < 0, \forall t \ge 0$，則存在唯一最佳置換時程 $s^* = w$ 使得期望總利潤 ETR_1 最大。

證明： 當 $h'(t) > 0$ 且 $g'(t) < 0, \forall t \ge 0$，可知式子(5)的

$d^2ETR_1/ds^2<0$，即 $dETR_1/ds$ 爲 s 的遞減函數。依據限制式 $0\le s\le w$，將 $s=0$ 及 $s=w$ 代入式子(4)，可得結果爲

$$dETR_1/ds\big|_{s=0}=M[g(0)-g(T)]+C_d h(T)+C_m h(T)$$

與

$$dETR_1/ds\big|_{s=w}=M[g(w)-g(T-w)]+C_d[h(T-w)-h(w)]+C_m h(T-w)$$

因生產函數 $g(t)$ 爲遞減函數，故障率函數 $h(t)$ 爲遞增函數及在條件 $2w\le T$ 的情況下，可得 $dETR_1/ds\big|_{s=0}>0$ 與 $dETR_1/ds\big|_{s=w}>0$。由 $d^2ETR_1/ds^2<0$，可得 $dETR_1/ds$ 爲 s 的遞減函數。因此可得 $dETR_1/ds>0,\forall s\in[0,w]$，即利潤函數 ETR_1 爲 s 的遞增函數，故可得最佳的置換時程爲 $s^*=w$。

定理 1 的結果說明，買方在使用生產設備時，設備的置換時程在保固到期時做置換可獲得最大的利潤。

(二) 狀況(ii)的最佳置換時間： $w\le s\le T-w$

針對式子(2)的利潤模式中的設備置換時程 s，進行一階與二階微分可得

$$\frac{dETR_2}{ds}=M[g(s)-g(T-s)]+C_d[h(T-s)-h(s)]+C_m[h(T-s)-h(s)] \quad (6)$$

與

$$\frac{d^2ETR_2}{ds^2}=M[g'(s)+g'(T-s)]-C_d[h'(T-s)+h'(s)]-C_m[h'(T-s)+h'(s)] \quad (7)$$

檢視式子(6)，可得定理 2 的結果。

定理 2　當 $h'(t)>0$ 且 $g'(t)<0,\forall t\ge 0$，則存在唯一最佳置換時程 $s^*\in[w,T-w]$ 使得期望總利潤 ETR_2 最大。

證明：　當 $h'(t)>0$ 且 $g'(t)<0,\forall t\ge 0$，可知式子(7)的 $d^2ETR_2/ds^2<0$，即 $dETR_2/ds$ 爲 s 的遞減函數。依據限制式 $w\le s\le T-w$，將 $s=w$ 及 $s=T-w$ 代入式子(6)，可得下列結果

$$dETR_2/ds\big|_{s=w}=M[g(w)-g(T-w)]+C_d[h(T-w)-h(w)]+C_m[h(T-w)-h(w)]$$

與

$$dETR_2/ds\big|_{s=T-w}=M[g(T-w)-g(w)]+C_d[h(w)-h(T-w)]+C_m[h(w)-h(T-w)]$$

因生產函數 $g(t)$ 爲遞減函數，故障率函數 $h(t)$ 爲遞增函數及在條件 $2w\le T$ 的情況下，可得 $\partial ETR_2/\partial s\big|_{s=0}>0$ 與 $dETR_2/ds\big|_{s=w}<0$。因 $d^2ETR_2/ds^2<0$，所以 $dETR_2/ds$ 爲 s 的遞減函數，即 $dETR_2/ds$ 的值在區間 $[w,T-w]$ 中由正至負。因此，可在區間 $[w,T-w]$ 找到唯一的最佳置換時間 s^* 滿足 $dETR_2/ds\big|_{s=s^*}=0$，使得 ETR_2 的利潤爲最大。

由定理 2 結果可知，在限制式 $w\le s\le T-w$ 下，存在唯一最佳置換時程 $s^*\in[w,T-w]$ 且其解可透過下列式子 $M[g(s)-g(T-s)]+C_d[h(T-s)-h(s)]+C_m[h(T-s)-h(s)]=0$ 求得。由上述式子可知，當 $g(s)-g(T-s)=0$ 及 $h(T-s)-h(s)=0$ 同時成立時，式子 $M[g(s)-g(T-s)]+C_d[h(T-s)-h(s)]+C_m[h(T-s)-h(s)]=0$ 即成立。因此可知，$g(s)-g(T-s)=0$ 及 $h(T-s)-h(s)=0$ 同時成立的條件爲 $s=T-s$，故可得最佳置換時間爲 $s^*=T/2$ 且 M、C_d、C_m 之值並不會影響最佳置換時間 s^* 的結果。

(三) 狀況(iii)的最佳置換時間： $T-w\le s\le T$

針對式子(3)的利潤模式中的設備置換時程 s，進行一階與二階微分可得

$$\frac{dETR_3}{ds}=M[g(s)-g(T-s)]-C_d[h(s)-h(T-s)]-C_m h(s) \quad (8)$$

與

$$\frac{d^2ETR_3}{ds^2}=M[g'(s)+g'(T-s)]-C_d[h'(s)+h'(T-s)]-C_m h'(s) \quad (9)$$

檢視式子(8)，可得定理 3 的結果。

定理 3　當 $h'(t)>0$ 且 $g'(t)<0,\forall t\ge 0$，則存在唯一最佳置換時程 $s^*=T-w$ 使得期望總利潤 ETR_3 最大。

證明：　當 $h'(t)>0$ 且 $g'(t)<0,\forall t\ge 0$，可知式子(9)的 $d^2ETR_3/ds^2<0$，即 $dETR_3/ds$ 爲 s 的遞減函數。依據限制式 $T-w\le s\le T$，將 $s=T-w$ 及 $s=T$ 代入式子(8)，可得下列結果

$$dETR_3/ds\big|_{s=T-w} = M[g(T-w)-g(w)] - C_d[h(T-w)-h(w)] - C_m h(T-w)$$

與

$$dETR_3/ds\big|_{s=T} = M[g(T)-g(0)] - C_d h(T) - C_m h(T)$$

因生產函數 $g(t)$ 爲遞減函數，故障率函數 $h(t)$ 爲遞增函數及在條件 $2w \le T$ 的情況下，可得 $dETR_3/ds\big|_{s=T-w} < 0$ 與 $dETR_3/ds\big|_{s=T} < 0$ 。由 $d^2ETR_3/ds^2 < 0$ ，可得 $dETR_3/ds$ 爲 s 的遞減函數。因此可得 $dETR_3/ds < 0, \forall s \in [T-w, T]$ ，即利潤函數 ETR_3 爲 s 的遞減函數，故可得最佳的置換時程爲 $s^* = T-w$ 。

由定理 3 的結果可知，買方在使用生產設備時，設備的置換時程在 $T-w$ 置換可獲得最大的利潤。

四、數值分析

假設設備壽命服從韋伯分配(Weibull (α,β))，其機率密度函數爲 $f(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}e^{-\alpha t^{\beta}}$ ， $t>0$ ，其中尺度參數爲 $\alpha = 0.3$ ，形狀參數爲 $\beta = 2.5$ 。因此，其故障率函數爲 $h(t) = \alpha\beta(\alpha t)^{\beta-1}$ 且累積故障率函數爲 $H(t) = (\alpha t)^{\beta}$ ，設備平均壽命爲 $\frac{1}{\alpha}\Gamma(1+1/\beta) \approx 3$。當 $\beta < 1$ 時，故障率函數爲遞減。當 $\beta > 1$ 時，故障率函數爲遞增。對於狀況(i)，狀況(ii)與狀況(iii)模式中相關參數設定如下：

$V = 10000$，$C_m = 300$，$C_d = 500$，$w = 2$，$T = 10$，$M = 50$，$g(t) = 500 - 10t$

表 1-3 摘錄不同參數 β ，保固期 w 及設備使用時間 T 下，狀況(i)，狀況(ii)與狀況(iii)模式之最佳置換時程 s^* 與利潤 $ETR_i, i = 1,2,3$。由表 1-3 可得下列結果：

(1) 當參數 β 遞增時，利潤隨著 β 遞增而遞減且利潤以狀況(ii)爲最高，設備的最佳置換時程爲 $s^* = 5$ 。

(2) 當保固期 w 遞增時，利潤隨著保固期 w 遞增而遞增且利潤以狀況(ii)爲最高，設備的最佳置換時程爲 $s^* = 5$ 。

(3) 當設備使用時間 T 遞增時，利潤隨著設備使用時間 T 遞增而遞增且利潤以狀況(ii)爲最高。

表 1 不同參數 β 下，各狀況最佳置換時程與利潤

	狀況(i)		狀況(ii)		狀況(iii)	
β	s^*	ETR_1	s^*	ETR_2	s^*	ETR_3
1.5	2	209933	5	214839	8	210909
2		208320		214116		209940
2.5		205806		213258		208399
3		201898		212230		205980

表 2 不同保固期 w 下，各狀況最佳置換時程與利潤

	狀況(i)		狀況(ii)		狀況(iii)	
w	s^*	ETR_1	s^*	ETR_2	s^*	ETR_3
1	1	199907	5	213121	9	203486
1.5	1.5	203041		213172	8.5	206115
2	2	205807		213258	8	208399
2.5	2.5	208203		213383	7.5	210335

表 3 不同 T 下，各狀況最佳置換時程與利潤

	狀況(i)		狀況(ii)		狀況(iii)	
T	s^*	ETR_1	s^*	ETR_2	s^*	ETR_3
6	2	123682	3	124438	4	124072
8		166467	4	169643	6	167687
10		205806	5	213258	8	208399
12		241473	6	255212	10	246066

五、結論

本論文對買方計畫在有限規劃期間內使用特定設備生產產品的情況下，建構設備進行單次置換的三個利潤模式，由三個利潤模式的最佳解推導與數值分析結果，可得設備最佳的置換時程在 $s^* = T/2$ 可獲得利潤爲最大，數值分析說明利潤隨保固期及設備使用時間遞增而遞增，但隨故障率參數 β 遞增而遞減。設備在保固期後置換所得之利潤比在保固期前置換爲高。本論文之研究結果可提供買方針對設備的故障率特性、設備附帶保固期限及規劃使用設備的時間來擬定設備的置換策略以達利潤爲最大之目的。

參考文獻

1. 林貞儀（民 93），免費小修對產品年齡置換策略的影響，國立台灣科技大學工業管理系碩士論文。
2. 張展綸（民 100），有限區間下具免費小修保固之可維修產品最佳單次置換時間，國立台灣科技大學工業管理系碩士論文。
3. 潘嘉良（民 88），可維修產品保證模型之研究，華梵大學工業管理學系碩士論文。
4. Barlow, R. E. and L. C. Hunter（1960）Optimum preventive maintenance policies. *Operations Research*, 8, 90-100.
5. Blischke, W. R. and D. N. P. Murthy（1994）*Warranty cost analysis*. M. Dekker, New York.
6. Boland P. J.（1982）Periodic replacement when minimal repair costs vary with time. *Navel Research Logistics Quarterly*, 29, 541-546.
7. Chen, M. and M. Feldman（1997）Optimal replacement policies with minimal repair and age-dependent costs. *European Journal of Operational Research*, 98, 75-84.
8. Chien, Y. H. and S. H. Sheu（2006）Extended optimal age-replacement policy with minimal repair of a system subject to shocks. *European Journal of Operational Research*, 98, 169-181.
9. Nakagawa, T. and S. Mizutani（2009）A summary of maintenance policies for a finite interval. *Reliability Engineering and System Safety*, 94, 89-96.
10. Osaki, S.（1993）*Applied stochastic system modeling*. Springer, New York.
11. Sheu, S. H.（1997）Extended block replacement policy of system subject to shocks. *IEEE Transactions on Reliability*, 46（3）, 375-382.
12. Sheu, S. H. and W. S. Griffith（2001）Optimal age-replacement policy with age-dependent minimal-repair and random-leadtime. *IEEE Transactions on Reliability*, 50, 302-307.

收件：101.11.09　修正：101.12.14　接受：102.01.28