

懸臂結構正多邊形截面受彎力學性能研究

陳偉清¹ 李明鵬^{1,2} 劉豐^{1,2}

¹建國科技大學土木工程系

500 彰化市介壽北路一號

²武漢大學土木工程學院

430072 武漢市東湖南路八號

摘要

為加深和優化懸臂結構設計，從正多邊形截面幾何性質入手，對其受彎力學性能展開具體研究，並應用於實際工程。研究表明：在同樣材料條件下，正四邊形截面單位勁度最佳，抗變形能力最強；控制截面彎曲應力與荷載作用方向有關，在不定向荷載作用下，圓形截面抵抗彎矩能力最佳，在定向荷載作用下，正四邊形截面抵抗彎矩能力最佳。工程算例結果分析表明：控制截面彎曲應力與懸臂結構上下部彎矩比值有關。當上部彎矩較大時，對看板柱，宜採用正四邊形；當下部彎矩較大時，如照明燈柱，宜採用正十六邊形或圓形。結論可直接為實際工程設計提供參考和指導。

關鍵詞：懸臂結構，正多邊形，勁度，彎曲應力，彎矩

Research on Flexural Mechanical Properties of Regular Polygon Section in Cantilever Structure

WEI-QING CHEN¹, MING-PENG LEE^{1,2} and FENG LIU^{1,2}

¹Department of Civil Engineering, Chienkuo Technology University

No. 1, Chieh Shou N. Rd., Changhua City 500, Taiwan, R.O.C.

²School of Civil Engineering, Wuhan University

No. 8, Dong Hu S. Rd., Wuhan City 430072, Hubei

ABSTRACT

Flexural mechanical properties of regular polygon sections were studied to optimize the design of cantilever structures. The results demonstrated that square sections possess optimal stiffness and anti-deforming capabilities. The flexural stress of sections is relevant to load direction. Bending resistance capability is optimal when circular sections are used for random load, whereas squares are optimal for directional load. Engineering examples indicate that the flexural stress of sections is also associated with the ratio of the upper and lower bending moment. The column section of most billboards should be square if the upper area is larger. Otherwise, similar to road lighting, the column section can be a circle or have 16 regular sides. This is a crucial guideline for the design of actual projects.

Key Words: cantilever structure, regular polygon, stiffness, flexural stress, bending moment

一、前言

臺灣屬於海島地區，每年強颱風侵襲都會造成重大災害，尤其是對公共設施如交通信號燈，電信電力設備等更造成重大破壞。因為全球氣候變遷造成氣候異常，爾後颱風強度更有可能超過以往強度，面對未來可能的挑戰，如何選擇最有效率的空間及材料應用方式及形狀，使結構發揮最大強度及功效，以降低災害與破壞程度實為當前要務。

管截面具有優越的力學性能及良好的經濟美觀性，在建築結構中得到廣泛應用，其中尤以圓形和矩形截面居多，很多學者對其進行了深入研究 [2, 4-5, 7-10]。其中，Wardenier 教授對管截面的力學性能進行了長期有效的研究，在他的努力下，矩形鋼管成為鋼結構的主要截面形式之一。臺灣地區由於燈塔、照明燈、看板等懸臂構築物在遭受強風侵襲時容易因為抗彎強度不足而發生破壞，本文特別針對常見正多邊形截面形狀進行研究探討，求得其於同樣材料條件下的受彎力學性能，以便對構築物進行優化設計，期使不僅能抵抗彎矩，防止斷裂，更可以節省成本，以便未來在颱風災害中可以降低損失，減少災害。

二、正多邊形截面的幾何性質

懸臂結構截面形式多依經驗選擇正四邊形、正六邊形、正十六邊形或圓形等，隨意性較大，為進行一般性討論，本文首先對正多邊形截面幾何性質進行分析。假設正多邊形實心截面的外接圓半徑為 r_n ， n 為邊數，面積為 A_n ，形心主慣性矩為 I_n ，則由幾何關係可得：

$$A_n = \frac{1}{2} r_n n \sin \frac{2\pi}{n} \Rightarrow r_n = \sqrt{\frac{2A_n}{n \sin \frac{2\pi}{n}}}, n = 4, 5, 6, 7 \dots \quad (1)$$

$$I_n = \frac{1}{24} (1 + 2 \cos^2 \frac{\pi}{n}) r_n^4 n \sin \frac{2\pi}{n}$$

$$= \frac{1}{6} (1 + \cos^2 \frac{\pi}{n}) \frac{A_n^2}{n \sin \frac{2\pi}{n}}, n = 4, 5, 6, 7 \dots \quad (2)$$

對於任何具有三個或三個以上對稱軸的圖形，它所有的形心軸都是主慣性軸，而且慣性矩相等（兩個對稱軸的交點即形心）。正多邊形就是如此。對於空心或環形截面，假設內外徑之比為 α ，在截面材料相等，即 $A_n=A$ 的情況下，則有：

$$A_n = \frac{1}{2} r_n^2 n (1 - \alpha^2) \sin \frac{2\pi}{n} \Rightarrow r_n = \sqrt{\frac{2A}{n(1 - \alpha^2) \sin \frac{2\pi}{n}}},$$

$$n = 4, 5, 6, 7 \dots \quad (3)$$

$$I_n = \frac{1}{6} \left[\frac{1 + 2 \cos^2 \frac{\pi}{n}}{n \sin \frac{2\pi}{n}} \frac{1 + \alpha^2}{1 - \alpha^2} \right] A^2, n = 4, 5, 6, 7 \dots \quad (4)$$

當 $A_n=A$ 為一定值，即所需截面材料面積相同時， I_n/A_n^2 與 n 的關係曲線見圖 1，其中 I_n/A_n^2 為單位面積所產生的勁度，簡稱單位勁度。由圖 1 可知：對於 α 取不同的定值，當 n 逐漸變大時， I_n 隨之減小。當 $n=4$ 時， I_n 值最大，為 $\frac{A^2}{12} \frac{1 + \alpha^2}{1 - \alpha^2}$ ；當 n 趨於無窮大，即截面為圓形時， I_n 值最小，為 $\frac{A^2}{4\pi} \frac{1 + \alpha^2}{1 - \alpha^2}$ 。兩極值之比為 $\pi : 3$ ，約相差 5%，這說明正多邊形截面慣性矩隨邊數的增加影響不大。

三、正多邊形截面受彎力學性能

由材料力學公式可知 [6]：當結構受到彎矩作用時，其截面變形曲率和彎曲應力分別為：

$$w^n = \frac{M}{EI_n} \quad (5)$$

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{My}{I_n} \quad (6)$$

式 5 和式 6 中： w 為結構撓度， M 為截面所受到的彎矩， E 為材料楊氏模量， W 為截面模量， y 為截面上點離中性軸最遠距離， I_n 同前。

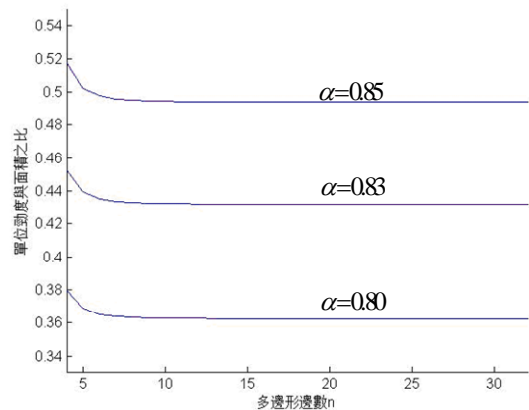


圖 1. 多邊形邊數 n 與 I_n/A_n^2 的關係曲線

由前面的分析可知， I_n 隨著邊長數 n 的增加而減小，那麼，當採用同一材料，即 E 一定時，截面變形隨 n 的增加而增大。 EI_n 一般稱為截面的抗彎剛度或勁度，故當 $n=4$ 時，截面勁度最大，受彎變形最小。這意味著，在其他條件相同的情況下，正四邊形截面抵抗彎曲變形的能力最佳。

對於彎曲應力，則還要考慮到 y 的影響，而 y 與荷載作用方向有關。對於偶數邊的多邊形，有兩種極端情況，見圖 2。

當中性軸是多邊形的對角線時， y 應取 r_n ，此時截面的抗彎係數最小：

$$W_{\min} = \frac{I_n}{r_n} = \frac{\sqrt{2}}{12} \left[\left(1 + 2\cos^2 \frac{\pi}{n} \right) \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\sqrt{n \sin \frac{2\pi}{n}}} \frac{1 + \alpha^2}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \right] A\sqrt{A} \quad (7)$$

當中性軸與多邊形的正向平行時， y 應取 $r_n \cos \frac{\pi}{n}$ ，此時截面的抗彎係數最大：

$$W = \frac{I_n}{r_n \cos \frac{\pi}{n}} = \frac{\sqrt{2}}{12} \left[\frac{1 + 2\cos^2 \frac{\pi}{n}}{\sqrt{n \sin \frac{2\pi}{n}}} \frac{1 + \alpha^2}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \right] A\sqrt{A} \quad (8)$$

在不定向荷載如風荷載等隨機荷載作用下，應考慮控制情況，所以採用最小截面抗彎係數來計算；在定向荷載比如集中荷載等作用下，可調整荷載方向，使截面得到充分利用，所以採用最大截面抗彎係數來設計。

將 I_n 公式帶入以上兩式，可得到 W_{\min} 和 W 與數目 n 之間的關係，具體見圖 3。為簡便起見，僅對實心截面進行分析。實際上當 α 為一定值時，相關分析結果同樣適用。由

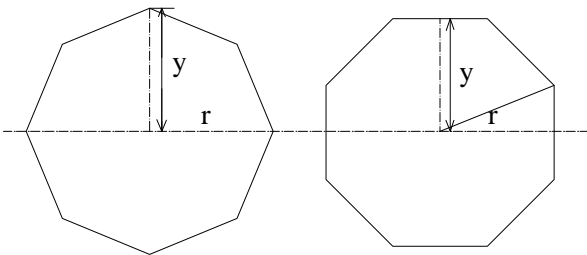


圖 2. y 與荷載作用方向的關係

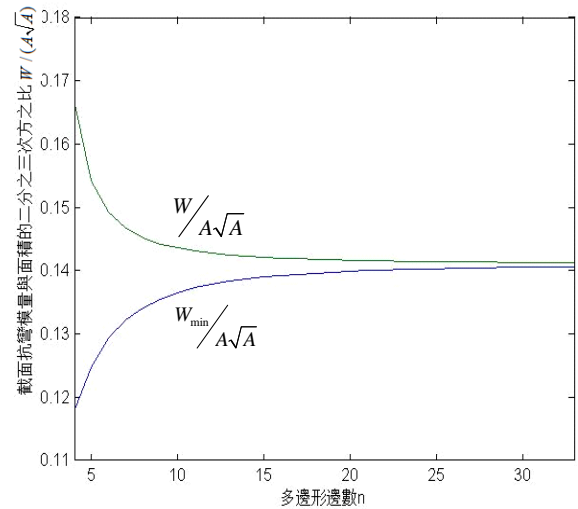


圖 3. 多邊形邊數 n 與截面抗彎模量 $W/(A\sqrt{A})$ 的關係曲線

圖 3 可知； W_{\min} 隨著 n 增大而增大， W 隨著 n 增大而減小。當截面為圓形時， W_{\min} 取得最大值；當截面為正四邊形時， W 取得最大值。這意味著：截面彎曲應力大小與荷載作用方向有關，在不定向荷載作用下，圓形截面抵抗彎矩能力最佳，其彎曲應力較正四邊形降低 15.6%；在定向荷載作用下，正四邊形截面抵抗彎矩能力最佳，其彎曲應力較圓形降低 16.4%。對實際工程進行設計時，應考慮不同的荷載控制條件選擇最優的截面形式。

四、工程算例

常見的公共設施有路燈、大型照明燈、看板等 [1]。這些懸臂構築物通常可以簡化為三個部分：基礎，下部結構以及上部結構。下部結構通常由空心或格構式支撐柱組成。上部結構通常由燈罩或面板組成。考慮最簡單的情形：設構築物為等截面，高度不超過 9 米，此時構築物所受風荷載為均布荷載。設計荷載以風荷載為主，通常以面板所在平面受力為控制情況進行分析，故可視風荷載為一定向荷載。設懸臂結構下部柱高度為 h ，上部面板面積為 S ，其形心距地高度為 H ，當 h 較小時，假設作用於構築物的風荷載可等效為一均布荷載 ω 。其中，構築物迎風面寬度與正多邊形邊數有關，具體見圖 4。

則其控制截面彎曲應力為：

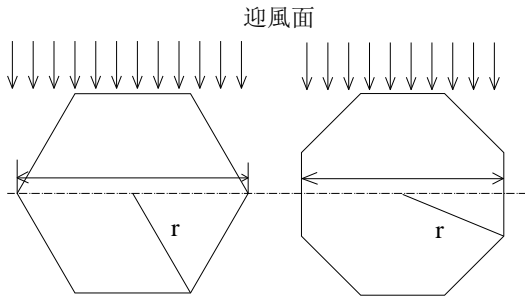


圖 4. 迎風面寬度與正多邊形邊數的關係示意圖

$$\sigma = \begin{cases} \frac{\beta\omega r_n h^2 \cos \frac{\pi}{n} + S\omega H}{W} = \frac{\sqrt{\frac{2A}{(1-\alpha^2)}}\omega h^2}{\left(\sqrt{n \sin \frac{2\pi}{n}} / \beta \cos \frac{\pi}{n}\right)W} + \frac{S\omega H}{W}, & n = 4k (k = 1, 2, 3, \dots) \\ \frac{\beta\omega r_n h^2 + S\omega H}{W} = \frac{\sqrt{\frac{2A}{(1-\alpha^2)}}\omega h^2}{\left(\sqrt{n \sin \frac{2\pi}{n}} / \beta\right)W} + \frac{S\omega H}{W}, & n = 4k + 2 (k = 1, 2, 3, \dots) \end{cases} \quad (9)$$

可簡化為：

$$\sigma = \frac{M_1}{W^e} + \frac{M_2}{W} = \frac{S^e \omega h}{W^e} + \frac{S\omega h}{W} \quad (10)$$

式(10)中： M_1 、 M_2 為結構在荷載作用下上下部所產生的彎矩，在風荷載作用下，與上下部受荷面積有關； S^e 、 W^e 分別為等效截面面積和等效截面模量。

$$S^e = \sqrt{\frac{2A}{(1-\alpha)}}\omega h \quad (11)$$

$$W^e = \begin{cases} \left(\sqrt{n \sin \frac{2\pi}{n}} / \beta \cos \frac{\pi}{n}\right)W & n = 4k (k = 1, 2, 3, \dots) \\ \left(\sqrt{n \sin \frac{2\pi}{n}} / \beta\right)W & n = 4k + 2 (k = 1, 2, 3, \dots) \end{cases} \quad (12)$$

式(12)中： β 為構築物風荷載形狀因數，其取值見表1[3]。

由數學關係可知， W^e 隨著 n 增大而減小， W 隨著 n 增大而增大。因而， σ 的大小還取決於上下部彎矩 M_1/M_2 的比值情況。當 S^e 較大，即進行照明燈設計時，柱截面宜選

表 1. 構築物風荷載形狀因數

截面形狀	正四邊形	正六、八邊形	圓形
風荷載形狀因數	1.0	0.8	0.6

擇圓形；當 S 較大，即進行看板設計時，柱截面宜選擇正四邊形。

其控制截面彎曲應力比值與上下部彎矩比值關係如圖5所示。由圖5可知：正六邊形截面由於形狀因數較大，與其他正多邊形相比沒有任何優勢。當 $M_1/M_2=0.5$ 時，圓形、六邊形、八邊形彎曲應力相當，而正四邊形和圓形彎曲應力之比為7.0:7.9，兩者相差13%；當 $M_1/M_2=2.56$ 時，正四邊形和圓形彎曲應力相當；當 $M_1/M_2=5$ 時，正四邊形與圓形彎曲應力之比為16.6:15.6，最大相差6%。由此可認為：當 $M_1/M_2 < 0.5$ 時，構築物截面設計應採用正四邊形；當 $M_1/M_2 > 0.5$ 時，構築物截面設計應採用圓形，考慮加工連接方便和形式多樣化，也可以考慮正十六邊形。當比值介於0.5或5之間時，可綜合考慮其他因素加以選擇。

五、結論

本文對懸臂結構正多邊形截面受彎力學性能展開具體研究，認為對實際工程進行設計時，應綜合考慮不同的設計條件選擇最優的截面形式。具體而言，可概括為：

1. 若以控制懸臂結構變形為目的，下部結構柱截面宜選擇正四邊形，其抵抗彎曲變形的能力最佳。
2. 若以控制截面彎曲應力為目的，則應考慮荷載的作用方向和大小。當荷載大小一定時，在不定向荷載作用下，圓形截面抵抗彎矩能力最佳，在定向荷載作用下，正四

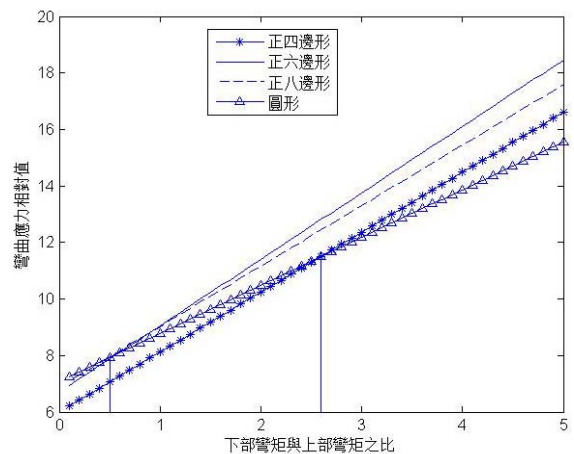


圖 5. 控制截面彎曲應力相對值與上下部彎矩比值關係

邊形截面抵抗彎矩能力最佳。當荷載大小與結構形式或高度有關時，需進行進一步討論。

工程算例結果表明，控制截面彎曲應力與懸臂結構上下部彎矩比值有關。當上部結構彎矩較大，如進行看板設計時，柱截面宜選擇正四邊形；當下部結構彎矩較大，如進行照明燈設計時，柱截面宜選擇圓形或正十六邊形。

參考文獻

1. 石聽安 (2007) 中杆燈的總體設計探討，燈與照明，31(3)，39-42。
2. 沃登尼爾著 (2004)，鋼管截面的結構應用 (張其林、劉大康譯)，頁 12-17，同濟大學出版社，上海。
3. 詹氏書局編輯部 (2004)，最新建築技術規則，詹氏書局，臺北市。
4. CIDECT (1984) *Construction with Hollow Steel Sections*, British Steek plc, Corby, Northants, U.K.
5. Frater, G. (1991) *Performance of Weld Rectangular Hollow Structural Section Trusses*. Ph.D. Dissertation, University of Toronto, Canada.
6. Gere, J. M. and S. P. Timoshenko (1990) *Mechanics of Materials*, 3rd Ed., 12-15. PWS Publishing Company, Boston.
7. Korol, R. M. and J. Hudoba (1972) Plastic behaviour of hollow structural sections. *Journal of the Structure Division*, ASCE, 98(5), 1007-1023.
8. Liu, D. K. and J. Wardenier (1998) Effect of boundary conditions and chord preloads on the strength of RHS multiplanar K-joints. Proceedings 8th Internet Symposium on Tubular Structures, Singapore.
9. Lu, L. H., G. D. De Winkel, Y. Yu and J. Wardenier (1994) Deformation limit for the ultimate strength of hollow section joints. Proceedings of the Sixth International Symposium on Tubular Structures, Melbourne, Australia.
10. Marshall, J. (1971) Torsional behaviour of structural rectangular hollow sections. *The Structure Engineer*, 49(8), 375-379.

收件：100.12.14 修正：101.02.23 接受：101.03.12