

狹長圓形穴槽潛流場之渦心位置與邊壁剪應力

胡宗義

蘭陽技術學院電腦應用工程系

26141 宜蘭縣頭城鎮復興路 79 號

摘 要

本文利用前人推導之流場流函數解析解，探討以狹長圓柱容器內盛極黏流體之圓形穴槽流動，此流場係由可以做部份轉動之邊界所帶動構成。研究指出具有單渦包結構流線之幾何型態，深受轉動邊界長度之影響。當轉動邊界長度增加，漩渦中心位置將更接近圓柱容器中心處，二者呈現高度非線性函數關係。另文中亦討論容器邊壁剪應力之分佈情形。

關鍵詞：流函數，圓形穴槽，單渦包結構，邊壁剪應力

Positions of Vortex Centers and Wall Shear Stresses for a Creeping Flow Field with an Extremely Long Circular Cavity

TZONG-YIH HWU

Department of Computer Application Engineering, LanYang Institute of Technology

79, Fu-Shin Rd., Tou Cheng, I-Lan, Taiwan 26141, R.O.C.

ABSTRACT

Using the analytic solution of stream function obtained in previous studies, this study resolved the problem of producing flow in a long circular cavity filled with a highly viscous fluid by partially rotating the boundary. The results demonstrated that rotating the boundary length significantly influences the corresponding flow patterns with a one-eddy structure. As the length increases, the vortex center of the eddy approaches the center of the container. The function used to describe the dependences of the vortex center position on the rotating boundary length is highly nonlinear. In addition, the shear stress distribution on the wall is quantitatively discussed.

Key Words: stream-function, circular cavity, one-eddy structure, shear stress on the wall

一、簡介

方形穴槽與圓形穴槽潛流分析是二種經典流體運動，除了可以深入探討理論分析外，亦可提供實際工業應用（例如：化工、機械、製藥、食品等）。前者主要是針對由矩形容器盛裝之流體，藉拖動一側邊界來驅使流體運動 [13]，後者則是改用圓形（柱）容器 [11]。此二種基礎流動，雖然在幾何形狀上具有相似度，但是於數學解析之難度卻是大不相同。雖然方形穴槽潛流場之理論解析甚多 [8, 9, 14]，然而迄今僅能獲得流函數之無窮級數解，並無法獲得密閉型（closed form）解析解。圓型穴槽潛流場則可求得密閉型解析解 [1, 11]，此特點對於欲利用流體運動速度從事混沌攪拌（chaotic stirring）計算之研究者 [4-7] 而言，是一項莫大幫助。

攪拌流體通常可粗略區分為高速攪拌與低速攪拌，前者往往處於紊流狀態，後者則保持在潛流運動。在某些化工製藥業中，被攪拌流體屬於高分子鍵，為避免破壞流體分子結構，是故必須採用低速方式來攪拌流體。以二維平面流體攪拌為例，若流場為恆定狀態（steady state），則流體運動軌跡必然平滑規則且可預測 [12]，在此情形下，流體將無法進行有效攪拌。如果要充份混合流體，則必須於流場上加入隨時間變化之邊界條件 [12]，藉此造就混沌之流體軌跡，並達到攪拌流體之目的。

縱觀文獻記載，針對圓形穴槽流動之研究較為稀少，此主題看似簡單，卻也值得投入研究。本文係利用前人已求得之流場流函數解，探討轉動邊界長度如何影響漩渦中心位置，透過數學分析可以清楚瞭解其間之高度非線性關係。另文中亦闡述轉動邊界長度如何影響容器邊壁剪應力之分佈。

二、數學方法

考慮一個沿著縱軸方向長度甚大之圓形穴槽容器（半徑為 R ），其內盛有流體（圖 1）。容器壁由兩個內外緊貼之圓柱組成，內柱並未完全封閉且保持靜止不動，外柱以固定角速率 Ω 繞行中心軸線旋轉。本流動可定義出一個雷諾數：

$R_e \equiv \rho R^2 \Omega / \mu$ （ ρ 與 μ 分別為流體密度與黏滯係數），為簡化數學分析，本研究流動範疇侷限於 $R_e \ll 1$ 者，亦即慣性力可忽略不計，在此情形下控制方程式可寫成

$$\nabla^{*4} \Psi^* = 0 \quad (1)$$

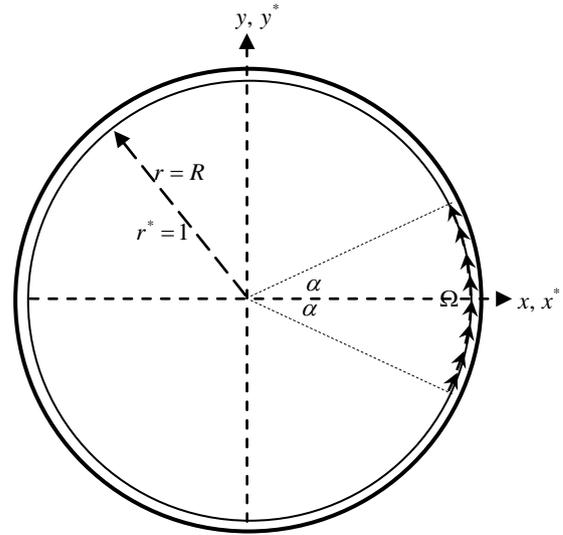


圖 1. 圓形穴槽潛流

式中， Ψ^* 為無因次流函數，其與流函數 Ψ 之關係為

$$\Psi^* \equiv \Psi / (R^2 \Omega)$$

$$\nabla^{*4} = \left[\partial^{*2} / \partial r^{*2} + (1/r^*) \partial^* / \partial r^* + (1/r^{*2}) \partial^{*2} / \partial \theta^2 \right]$$

為無因次雙調和運算子， (r^*, θ) 為無因次極座標，其與極座標 (r, θ) 之關係為 $r^* \equiv r/R$ 。如前文所述，研究係選定圓柱半徑 R 為長度尺度；外圓柱轉動速率 $R\Omega$ 為速度尺度來無因次化本流動問題。另相應之邊界條件如下（於 $r^* = 1$ 處）

$$\Psi^* = 0 \quad (2)$$

$$\partial^* \Psi^* / \partial r^* = \begin{cases} -1 & -\alpha \leq \theta \leq \alpha \\ 0 & \text{其餘位置} \end{cases} \quad (3)$$

Burggraf [1] 以分離變數法求解此問題，Mills [11] 運用之方法則是葛林函數（Green's function）。綜合上述文獻記載，(1)、(2) 與 (3) 三式所構成數學模型之解可以表示成

$$\Psi^*(r^*, \theta) = \frac{(1-r^{*2})}{2\pi} \left\{ \tan^{-1} \left[\frac{(1+r^{*2} + 2r^* \cos \theta) \tan \frac{\alpha}{2} - 2r^* \sin \theta}{1-r^{*2}} \right] \right. \\ \left. + \tan^{-1} \left[\frac{(1+r^{*2} + 2r^* \cos \theta) \tan \frac{\alpha}{2} + 2r^* \sin \theta}{1-r^{*2}} \right] \right\} \quad (4)$$

上述說明圓形穴槽潛流場之流型取決於單一參數： α ，此為轉動邊界長度（無因次）之半。關於使用葛林函數方法求解之詳細過程，請參閱附錄一。

由圓形穴槽幾何形狀與轉動圓柱可以預測：流體沿著外壁旋轉方向環繞而行，流線產生單一個密閉渦包，其中心處流體速度為零。又此漩渦中心位置會隨著轉動邊界長度改變，當長度增加，外圓柱因流體黏性進而帶動更多流體運動，故漩渦中心會向圓柱中心偏移。考慮一個特例，當轉動邊界長度為整個圓形外柱時，透過簡單之對稱性原則可知：漩渦中心與圓柱中心將重合為一。

為精確描述漩渦中心位置與轉動邊界長度之複雜函數關係，以下繼續分析。由本潛流場對稱性原則可得：漩渦中心勢必位於 $\theta=0$ 線上（正 x^* 軸）。將此條件代入（4）式可得

$$\Psi^*(r^*) = \frac{(1-r^{*2})}{\pi} \tan^{-1} \left[\frac{(1+r^*) \tan \frac{\alpha}{2}}{1-r^*} \right] \quad (5)$$

另於漩渦中心處必須滿足零速度之條件： $\partial^* \Psi^* / \partial^* r^* = 0$ ，上式轉換成

$$\frac{(1-r^{*2}) \tan \frac{\alpha}{2}}{(1-r^*)^2 + (1+r^*)^2 \tan^2 \frac{\alpha}{2}} - r^* \tan^{-1} \left[\frac{(1+r^*) \tan \frac{\alpha}{2}}{1-r^*} \right] = 0 \quad (6)$$

此隱函數可定量計算漩渦中心位置： $r_c^* = F(\alpha)$ ，基於函數型式過於複雜，（6）式僅能利用數值方法求解。轉動邊界長度如何改變漩渦中心位置，將於第三節「結果與討論」中詳細說明。

由於流體黏性產生之無因次剪應力可以計算如（7）式

$$\tau^* = \frac{1}{r^*} \frac{\partial^* v_r^*}{\partial^* \theta} + \frac{\partial^* v_\theta^*}{\partial^* r^*} - \frac{v_\theta^*}{r^*} \quad (7)$$

式中無因次剪應力 τ^* 與有因次者 τ 之關係為： $\tau^* \equiv \tau / (\mu \Omega)$ ， (v_r^*, v_θ^*) 為以無因次極座標 (r^*, θ) 表示之二個無因次速度分量，其與無因次流函數之關係分別為： $v_r^* = (\partial^* \Psi^* / \partial^* \theta) / r^*$ 與 $v_\theta^* = -\partial^* \Psi^* / \partial^* r^*$ 。為求算圓形穴槽容器邊壁上（ $r^* = 1$ ）每單位面積所承受之剪力（亦即剪應力），將邊界條件： $v_r^* = 0$ 代入（7）式可得

$$\tau_w^* = \left(\partial^* v_\theta^* / \partial^* r^* - v_\theta^* / r^* \right) \Big|_{r^*=1} \\ = -r^* \partial^* / \partial^* r^* \left[(1/r^*) (\partial^* \Psi^* / \partial^* r^*) \right] \Big|_{r^*=1} \quad (8)$$

最後利用（4）式可求得無因次邊壁剪應力為

$$\tau_w^* = \frac{4}{\pi} \left[\frac{(1 + \cos \theta) \tan \frac{\alpha}{2}}{(1 + \cos \theta)^2 \tan^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \theta} \right] \quad (9)$$

詳細推導過程請見附錄二。

三、結果與討論

針對不同轉動長度圓形穴槽潛流場之流線圖可參閱 Hwu, Young 與 Chen 之論文 [4]。當轉動邊界為整個圓周時（靜止不動之內柱不存在），將 $\alpha = \pi$ 代入（6）式可得： $r_c^* = 0$ ，在此情形下，漩渦中心位於圓柱中心處。圖 2 清楚說明漩渦中心位置隨著轉動邊界長度之變化情形。當轉動邊界長度較小時（ $0 \leq \alpha < 0.1\pi$ ），其漩渦中心位置偏移率： $|\Delta r_c^* / \Delta \alpha|$ 較大，在此情形下，由於邊界所需帶動旋轉之流體數量較少，故每增加一單位轉動邊界長度，漩渦中心向圓柱中心偏移之距離較大。隨著轉動邊界長度增加，此偏移率下降，並約略趨向一個固定大小數值。以某個固定 α 值為論，當流場屬於較高雷諾數流動時，基於慣性效應抑制黏性效應，流體受邊界轉動影響程度減少，漩渦中心將無法深入流場內部，此現象與前人 [13] 於方形穴槽流動所得結果相似。

圖 3 係將（9）式結果繪製函數圖形，由於無因次邊壁剪應力（ τ_w^* ）函數具有角度座標（ θ ）之對稱性質，是故

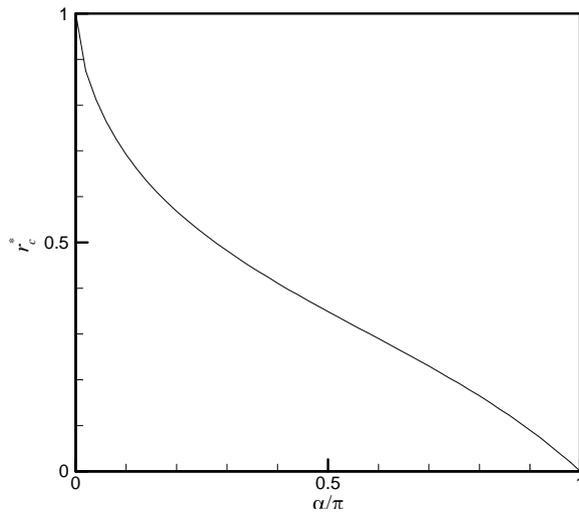


圖 2. 渦漩中心位置

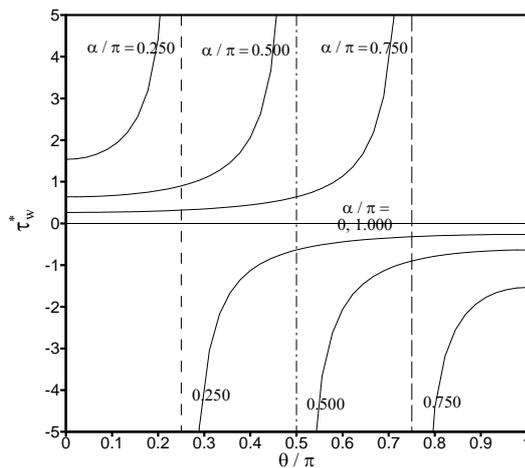


圖 3. 邊壁剪應力分佈

曲線繪製之自變數範圍取自 $[0, \pi]$ 。圖中顯示 5 個不同轉動邊界長度，其邊壁剪應力之分佈情形。特別值的注意的是： $\alpha = 0$ 代表內柱完全密閉，旋轉外柱不存在，在此情形下，整個流場靜止不動是故邊壁剪應力等於零。另 $\alpha = \pi$ 代表靜止不動之內柱不存在，在此情形下，整個流體形成剛體轉動，是故亦無邊壁剪應力存在。若將線性速度： $v_\theta^* = r^*$ 代入 (8) 式，或將 $\alpha = \pi$ 代入 (9) 式，均可獲得驗證。除了上述二例之外，無論 α 數值為何，函數曲線在 $\theta = \alpha$ 處均出現不連續之斷裂。該處邊壁剪應力趨近無窮大，且左極限值趨近 $+\infty$ ，右極限值趨近 $-\infty$ 。此結果亦可由 (9) 式推得：當 $\theta \rightarrow \pm\alpha$ 時， τ_w^* 趨近無窮大，此現象發生於靜止內柱與旋轉外柱交接之二點位置，其速度梯度趨近無窮大，此乃數學

模型無法描述真實物理現象之暇疵。實際情形是：內外二圓柱之間存在狹窄空隙，是故速度梯度與剪應力均為有限數值，只是必須修正現有數學模型，重新求解。

由圖 3 曲線族約略可以看出：無論轉動邊界長度為何，邊壁剪應力在 $\theta = 0$ 與 $\theta = \pi$ 二處，其值趨近某些常數，此可由 (9) 式佐証。將 $\theta = 0$ 代入 (9) 式可得： $\tau_w^*(0) = 2/[\pi \tan(\alpha/2)]$ ，例如 $\alpha = \pi/2$ ，則有 $\tau_w^*(0) = 2/\pi$ 。將 $\theta = \pi$ 代入 (9) 式可得： $\tau_w^*(\pi) = -[2 \tan(\alpha/2)]/\pi$ ，例如 $\alpha = \pi/2$ ，則有 $\tau_w^*(\pi) = -2/\pi$ 。另發現無論 α 為何數值，下式恆成立： $\tau_w^*(0) \times \tau_w^*(\pi) = -4/\pi^2$ 。

四、結論

本文利用前人所得流場解析解，探討圓形穴槽潛流場中單渦包之流型結構。分析指出漩渦中心位置與轉動邊界長度之複雜關係可用一個函數式表示，隨著轉動邊界長度增加，因更多流體被驅動造成漩渦中心朝向容器中心移動。另對於流體沿著容器壁之剪應力分佈情形亦做了定量分析，結果顯示：靜止內柱與旋轉外柱交接處將引進二個奇異點，其處剪應力為無窮大，有趣的是：無論轉動邊界長度為何，剪應力在 $\theta = 0$ 與 $\theta = \pi$ 二處值之乘積恆等於一個常數。

參考文獻

1. Burggraf, O. R. (1966) Analytical and numerical studies of the structure of steady separated flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 24(1), 113-151.
2. Chien, W. L., H. Rising and J. M. Ottino (1986) Laminar mixing and chaotic mixing in several cavity flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 170, 355-377.
3. Greenberg, M. D. (1971) *Application of Green's Functions in Science and Engineering*, 125-126. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
4. Hwu, T. Y., D. L. Young and Y. Y. Chen (1997) Chaotic advectons for stokes flows in circular cavity. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 123(8), 774-782.
5. Hwu, T. Y. (2000) Stretches of fluid materials for stokes flow in circular cavity. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 126(5), 554-557.
6. Hwu, T. Y. (2006) Fluid stirrings in a circular cavity with various driven boundaries. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 25(2), 192-203.

-
7. Hwu, T. Y. (2008) Chaotic stirring in a new type of mixer with rotating rigid blades. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 27(3), 239-250.
 8. Joseph, D. D. (1977) The convergence of biorthogonal series for biharmonic and Stokes flow edge problem Part I. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 33(2), 337-347.
 9. Joseph, D. D. and L. Stures (1978) The convergence of biorthogonal series for biharmonic and Stokes flow edge problem Part II. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 34(1), 7-26.
 10. Leong, C. W. and J. M. Ottino (1989) Experiments on mixing due to chaotic advection in a cavity. *Journal of Fluid Mechanics*, 209, 463-499.
 11. Mills, R. D. (1977) Computing internal viscous flow problem for the circle by integral method. *Journal of Fluid Mechanics*, 79(3), 609-624.
 12. Ottino, J. M. (1989) *The Kinematics of Mixing: Stretching, Chaos, and Transport*, 193-214. Cambridge University, Cambridge.
 13. Pan, F. and A. Acrivos (1967) Study flows in rectangular cavities. *Journal of Fluid Mechanics*, 28, 643-655.
 14. Shankar, P. N. (1993) The eddy structure in Stokes flow in a cavity. *Journal of Fluid Mechanics*, 250, 371-383.

收件：100.07.29 修正：100.08.11 接受：100.09.05

附錄一

將 (1) 式乘上函數 G ，並於單位圓盤區域 $D(r^* < 1)$ 內積分可得 [3]

$$\iint_D G \nabla^4 \Psi^* dA = 0 \quad (\text{A1})$$

利用二次葛林定理可導出

$$\oint_{\partial D} \left[G(\nabla^2 \Psi^*)_r - (\nabla^2 \Psi^*)_r G_r + (\nabla^2 G)_r \Psi^* - \Psi^*(\nabla^2 G)_r \right] ds + \iint_D \Psi^* \nabla^4 G dA = 0 \quad (\text{A2})$$

式中 ∂D 為單位圓 ($r^* = 1$)，右下標 r^* 係代表相關函數對 r^* 取偏微分。令 G 為葛林函數，滿足方程式 $\nabla^4 G(r^*, \theta; \bar{r}^*, \bar{\theta}) = \delta(r^*, \theta; \bar{r}^*, \bar{\theta})$ ， δ 為 delta 函數，且滿足邊界條件： $G = 0$ 與 $\partial G / \partial r^* = 0$ 。再將 (2) 式與 (3) 式代入，則 (A2) 式可大幅簡化成

$$\Psi^*(\bar{r}^*, \bar{\theta}) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \nabla^2 G d\theta \quad (\text{A3})$$

依據文獻記載 [3]，葛林函數可以求出並表示成

$$G(r^*, \theta; \bar{r}^*, \bar{\theta}) = -\frac{\bar{r}^{*2} + r^{*2} - 2\bar{r}^* r^* \cos(\bar{\theta} - \theta)}{16\pi} \times \log \left[\frac{\bar{r}^{*2} r^{*2} - 2\bar{r}^* r^* \cos(\bar{\theta} - \theta) + 1}{\bar{r}^{*2} + r^{*2} - 2\bar{r}^* r^* \cos(\bar{\theta} - \theta)} \right] + \frac{(\bar{r}^{*2} - 1)(r^{*2} - 1)}{16\pi} \quad (\text{A4})$$

將 (A4) 式代入 (A3) 式求出 $\Psi^*(\bar{r}^*, \bar{\theta})$ ，最後將其自變數更換成 (r^*, θ) 即可求得 (4) 式。

附錄二

由 (4) 式可計算如下

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^*} \frac{\partial^* \Psi^*}{\partial^* r^*} = & -\frac{1}{\pi} \left\{ \tan^{-1} \left[\frac{\left(1+r^{*2}+2r^* \cos \theta\right) \tan \frac{\alpha}{2} - 2r^* \sin \theta}{1-r^{*2}} \right] + \tan^{-1} \left[\frac{\left(1+r^{*2}+2r^* \cos \theta\right) \tan \frac{\alpha}{2} + 2r^* \sin \theta}{1-r^{*2}} \right] \right\} \\ & + \left(\frac{1-r^{*2}}{\pi r^*} \right) \left\{ \frac{\left(2r^* + \cos \theta + r^{*2} \cos \theta\right) \tan \frac{\alpha}{2} - \left(1+r^{*2}\right) \sin \theta}{\left(1-r^{*2}\right)^2 + \left[\left(1+r^{*2}+2r^* \cos \theta\right) \tan \frac{\alpha}{2} - 2r^* \sin \theta\right]^2} \right. \\ & \left. + \frac{\left(2r^* + \cos \theta + r^{*2} \cos \theta\right) \tan \frac{\alpha}{2} + \left(1+r^{*2}\right) \sin \theta}{\left(1-r^{*2}\right)^2 + \left[\left(1+r^{*2}+2r^* \cos \theta\right) \tan \frac{\alpha}{2} + 2r^* \sin \theta\right]^2} \right\} \end{aligned}$$

然後計算邊壁剪應力（刪去所有包含 $1-r^{*2}$ 之項）

$$\tau_w = -r^* \frac{\partial^*}{\partial^* r^*} \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial^* \Psi^*}{\partial^* r^*} \right) \Bigg|_{r^*=1} = \frac{4}{\pi} \left[\frac{(1+\cos \theta) \tan \frac{\alpha}{2}}{(1+\cos \theta)^2 \tan^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \theta} \right]$$