Journal of Science and Engineering Technology, Vol. 5, No. 4, pp. 69-76 (2009)

靜不定樑的拉普拉斯變換解法

鍾文貴　王弘祐　胡竣傑
屏東科技大學土木工程系
91207 屏東縣內埔鄉學府路 1 號

摘　要

靜不定樑是常見的工程結構，連續樑即是典型的例子，其特徵爲樑的約束反力多於靜力平衡方程式，用一般方法求解較繁雜且易出錯。本文用拉普拉斯變換將均質等截面樑的撓曲曲線方程式 $EIy^{(4)}=-q(x)$ 化爲代數方程式，推導得包含作用在樑上的載重函數 $Q(x)$ 與樑的端點邊界條件 $y(0), y'(0), y''(0)$ 及 $y'''(0)$ 等輸入參數之解析公式，並以四個範例說明應用此公式求解靜不定樑的具體方法與步驟。計算過程簡潔且方便應用，具有實用價值。

關鍵詞：靜不定樑，拉普拉斯變換，撓曲

A Solution to Indeterminate Beams Using the Laplace Transform

WEN-GUEY CHUNG, HUNG-YU WANG and JIUNN-JYE HWU
Department of Civil Engineering, National Pingtung University of Science & Technology
No. 1, Hseuh Fu Rd., Nei Pu, Pingtung, Taiwan 91207, R.O.C.

ABSTRACT

Statistically indeterminate beams such as continuous ones are commonly applied to practical engineering structures. A solution to such indeterminate beams, based on the Laplace transform, is presented in this report. A facilitating formula with loading functions and boundary conditions upon the beam was derived; moreover, four examples were used for testing the formula. The computational results from these examples show that this formula can easily and efficiently solve the problem of indeterminate beams, thereby evidently demonstrating the practicability of the presented method.

***Key Words*: indeterminate beams, Laplace transform**

一、前言

當樑的約束反力個數多於靜力平衡方程式數時，該樑即稱爲靜不定樑（indeterminate beam）。求解均質等截面靜不定樑的方法有很多種，如能量法、面積力矩法、共軛樑法、奇異函數法、積分法等 [7, 8, 10-12]，其中積分法爲最基本的方法。應用拉普拉斯變換（Laplace transform）解靜不定樑問題的文獻十分有限，大多數是以討論求解靜定樑的變形與臨界荷載問題爲主，例如：李豐浦 [3] 與馮賢佳 [6] 以拉氏變換法求解階梯靜定樑的彎曲變形；孫立來 [4] 用拉氏變換法解階梯靜定樑的臨界載荷等。在解題技巧上這些方法均將超出靜力平衡方程式的多餘約束力視爲樑上的作用載重，如此便可把靜不定樑問題轉換成爲多種力系作用下的靜定樑問題，再以給定的條件來滿足靜力平衡條件，就可以解得所有的約束反力。本文亦基於此概念，利用拉普拉斯變換把均質等截面樑的撓曲曲線方程式（$EIy^{(4)}=-q(x)$）化爲代數方程式，再取拉普拉斯逆變換而推導得包含作用載重函數與端點邊界條件的解析公式。解題時把超過靜力平衡方程式數的多餘的約束反力解除後視爲作用載重，將作用載重函數與端點邊界條件代入解析公式，即可解得多餘的約束反力，再運用靜力平衡條件，就可解得所有的約束反力。

二、公式推演

材料力學中討論的樑彈性撓曲曲線方程式爲 [3, 4, 6-8, 10-12]

$$y^{(4)}(x)=\frac{q(x)}{EI} \tag{1}$$

式中 E 與 I 分別爲均質等截面樑的彈性模數與慣性矩；x 與 y 爲以樑右端點起算的參考坐標，x 軸取向右爲正，y 軸取向下爲正，$y(x)<0$ 表示撓曲曲線向上彎曲，$y(x)>0$ 則爲向下彎曲。$q(x)$ 爲作用於樑上的載重，包括集中載重、集中力矩與分佈載重，其中載重取向下爲正，力矩取逆時針爲正。吳从圻 [2] 詳細討論了這些作用載重的數學表達式，摘要列如表 1。

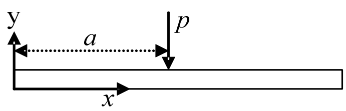
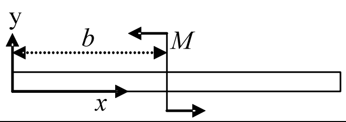
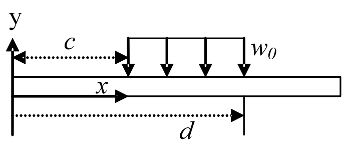
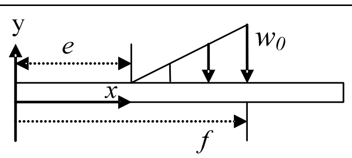
首先，對（1）式兩邊取拉普拉斯轉換，即

$$s^4Y(s)-s^3y(0)-s^2y''(0)-sy'(0)-y'''(0)=L\left\{\frac{q(x)}{EI}\right\}$$

整理後可得

$$Y(s)=\frac{1}{s}y(0)+\frac{1}{s^2}y'(0)+\frac{1}{s^3}y''(0)+\frac{1}{s^4}y'''(0)+\frac{1}{s^4}L\left\{\frac{q(x)}{EI}\right\} \tag{2}$$

表 1. 作用載重的數學表達式

載重類型		圖示	數學表達式
集中載重			$q(x)=p\delta(x-a)$
集中力矩			$q(x)=-M\delta'(x-b)$
分佈載重	均勻分佈		$q(x)=w_0[u(x-c)-u(x-d)]$
	線性分佈		$q(x)=\dfrac{w_0(x-e)}{f-e}[u(x-e)-u(x-f)]$

註：$\delta(x)$ 爲 Dirac delta 函數，$\delta(x-a)=\begin{cases}0, & x\neq a\\ \infty, & x=a\end{cases}$；$u(x)$ 爲單位步階函數，$u(x-a)=\begin{cases}0, & x<a\\ 1, & x>a\end{cases}$。

式中 $Y(s)=L\{y(x)\}=\int_0^\infty y(x)e^{-sx}dx$ ；$y(0)$, $y'(0)$, $Ely''(0)$ 與 $Ely'''(0)$ 等分別表示樑在原點處的撓度、轉角、彎矩與剪力，可由樑坐標原點的邊界條件來決定。

其次，對（2）式取拉普拉斯逆轉換可得

$$y(x)=y(0)+xy'(0)+\frac{x^2}{2}y''(0)+\frac{x^3}{6}y'''(0)+L^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}L\left\{\frac{q(x)}{EI}\right\}\right\} \tag{3}$$

上式右邊的最後一項引用褶積定理（convolution theorem），即

$$(f\otimes g)(x)=\int_0^x f(\tau)g(x-\tau)d\tau=\int_0^x g(\tau)f(x-\tau)d\tau \tag{4}$$

可得

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}L\left\{\frac{q(x)}{EI}\right\}\right\}=\frac{x^3}{3!}\otimes\frac{q(x)}{EI}=\frac{1}{6EI}\int_0^x\tau^3q(x-\tau)d\tau \tag{5}$$

將（5）式代回（3）式可得包含作用載重函數 $Q(x)$ 與端點邊界條件（$y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$ 與 $y'''(0)$）的彈性撓曲曲線方程式為

$$y(x)=y(0)+xy'(0)+\frac{x^2}{2}y''(0)+\frac{x^3}{6}y'''(0)+\frac{Q(x)}{6EI} \tag{6}$$

式中

$$Q(x)=x^3\otimes q(x)=\int_0^x\tau^3q(x-\tau)d\tau=\int_0^x(x-\tau)^3q(\tau)d\tau \tag{7}$$

上式中的 $Q(x)$ 為作用在樑上的載重函數，係由作用在樑上的載重 $q(x)$（參見表 1）疊加組成。將表 1 的載重類型分別代入（7）式積分後，可得各類型載重對應的載重函數 $Q(x)$，以下分別說明如后：

1. 集中載重：$q(x)=p\delta(x-a)$（取向下為正）

$$Q(x)=p\int_0^x\delta(\tau-(x-a))\tau^3d\tau=p(x-a)^3u(x-a) \tag{8}$$

上式積分過程中，引用積分式：$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x-a)dx=f(a)$ [1, 5, 9]。

2. 集中力矩：$q(x)=-M\delta'(x-b)$（取逆時針為正）

$$Q(x)=3M\int_0^x\tau^2\delta(\tau-(x-b))d\tau=3M(x-b)^2u(x-b) \tag{9}$$

上式積分過程中，引用積分式：$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta'(x-a)dx=-\int_{-\infty}^{\infty}f'(x)\delta(x-a)dx=-f'(a)$ [1, 9]。

3. 均佈載重：$q(x)=w_0[u(x-c)-u(x-d)]$（取向下為正）

$$Q(x)=w_0\int_0^x[u(\tau-c)-u(\tau-d)](x-\tau)^3d\tau$$
$$=\frac{w_0}{4}[(x-c)^4u(x-c)-(x-d)^4u(x-d)] \tag{10}$$

4. 線性分佈載重：$q(x)=\frac{w_0(x-e)}{f-e}[u(x-e)-u(x-f)]$（取向下為正）

$$Q(x)=\frac{w_0}{f-e}\int_0^x(x-\tau)^3(\tau-e)[u(\tau-e)-u(\tau-f)]d\tau$$
$$=\frac{w_0}{20(f-e)}[(x-e)^5u(x-e)-(x-f)^5u(x-f)$$
$$-5(f-e)(x-f)^4u(x-f)] \tag{11}$$

（10）（11）兩式積分過程中，引用積分式：$\int_0^x f(x)u(x-a)dx=u(x-a)\int_a^x f(x)dx$ [1, 9]。

其他類型的作用載重（如二次、三次曲線載重等）亦可先建立如表 1 的數學表達式，再代入（7）式積分而得對應的載重函數 $Q(x)$。當樑同時承載各種類型的載重時，可就其對應的載重函數 $Q(x)$（即（8）-（11）式）加以疊加組成。

三、範例計算與討論

（一）範例計算

解析樑的靜不定問題時，首先把超出靜力平衡方程式數的未知約束反力解除，視為樑上的作用載重，再根據作用在樑上的多種載重型態，引用（8）-（11）式對應的載重函數，

利用疊加原理組合載重函數 $Q(x)$ 後，再與端點邊界條件 $y(0), y'(0), y''(0)$ 與 $y'''(0)$ 一起代入（6）式，即可解得多餘約束反力的解答，再進一步地運用靜力平衡條件，就可解得所有的約束反力。以下舉例說明應用前節推演得到的公式，解析求解靜不定樑的具體計算方法與步驟。

1. 範例 1：求圖 1 兩端支撐靜不定樑的 B 點反力 [11, p. 685]。

解題：解除圖 1(a) 支撐點 B 的多餘約束力，將之視為集中載重 R，此時便成為包含均佈載重（w_0）、集中載重（p）與支撐點反力（R）的多種載重作用下的靜定懸臂樑問題（見圖 1(b)）。

（1）樑上的作用載重函數：將圖 1(b) 樑上的作用載重參考（8）-（11）式，利用疊加原理表示為

$$Q(x) = \frac{w_0}{4}[x^4u(x) - (x-L)^4u(x-L)] - R(x-L)^3u(x-L)^3u(x-L) \qquad (12)$$

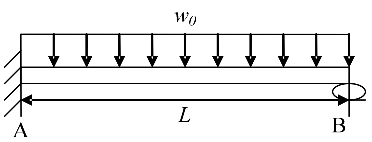
（2）邊界條件：樑端點處的撓度、轉角、彎矩與剪力等分別滿足如下條件：

$$y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y''(0)=\frac{-1}{EI}\left(RL-\frac{w_0L^2}{2}\right),$$

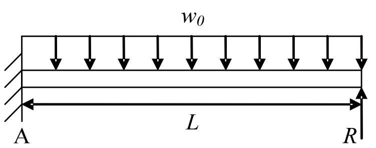
$$y'''(0)=\frac{-1}{EI}(w_0L-R),\ y(L)=0,\ y''(L)=0 \qquad (13)$$

將（13）式端點邊界條件代入（6）式得

$$y(x)=\frac{-x^2}{2EI}\left(RL-\frac{w_0L^2}{2}\right)-\frac{x^3}{6EI}(w_0L-R)+\frac{Q(x)}{6EI} \qquad (14)$$



(a) 一次靜不定樑



(b) 靜定懸臂樑（解除支撐點 B 處約束力）

圖 1. 兩點支撐靜不定樑

當 $x\in(0, L)$ 時，$u(x)=1$，$u(x-L)=0$，代入（12）式得

$$Q(x)=\frac{w_0x^4}{4} \qquad (15)$$

（15）式代入（14）式且令 $y(L)=0$ 得

$$0=-\frac{L^2}{2EI}\left(RL-\frac{w_0L^2}{2}\right)-\frac{L^3}{6EI}(w_0L-R)+\frac{1}{6EI}\left(\frac{w_0L^4}{4}\right)$$

$$=\frac{L^3}{6EI}\left(2R-\frac{3w_0L}{4}\right) \qquad (16)$$

上式移項處理可得靜不定樑的多餘約束反力為

$$R=\frac{3w_0L}{8} \qquad (17)$$

此結果與 Gere 和 Timoshenko [11] 的計算結果一致，顯示推演的解析公式正確無誤。

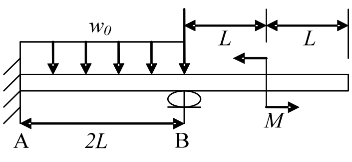
2. 範例 2：求圖 2 靜不定外伸樑的 B 點反力。

解題：解除圖 2(a) 端點 B 的多餘約束力，將之視為集中載重 R，此時作用在樑上的載重如圖 2(b) 所示為一懸臂樑。

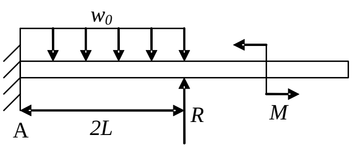
（1）樑上的作用載重函數：將圖 2(b) 樑上的作用載重參考（8）-（11）式，利用疊加原理表示為

$$Q(x)=3M(x-3L)^2u(x-3L)-R(x-2L)^3u(x-2L) + \frac{w_0}{4}[x^4u(x)-(x-2L)^4u(x-2L)] \qquad (18)$$

（2）邊界條件：樑端點與支撐點處的撓度、轉角、彎矩與剪力等分別滿足如下條件：



(a) 一次靜不定外伸樑



(b) 靜定懸臂樑（解除支撐點 B 處約束力）

圖 2. 兩點支撐靜不定外伸樑

$$y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y''(0)=\frac{-1}{EI}(2RL+M-2w_0L^2),$$
$$y'''(0)=\frac{-1}{EI}(2w_0L-R),\ y(2L)=0,\ y''(4L)=0,\ y'''(4L)=0 \quad (19)$$

將（19）式端點邊界條件代入（6）式得

$$y(x)=-\frac{x^2}{2EI}(2RL+M-2w_0L^2)-\frac{x^3}{6EI}(2w_0L-R)+\frac{1}{6EI}Q(x) \quad (20)$$

當 $x\in(0,\ 2L)$ 時，$u(x)=1$，$u(x-2L)=0=u(x-3L)$，代入（18）式得

$$Q(x)=\frac{w_0x^4}{4} \quad (21)$$

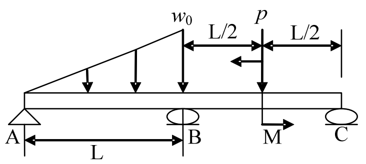
（21）式代入（20）式且令 $y(2L)=0$ 得

$$0=-\frac{4L^2}{2EI}(2RL+M-2w_0L^2)-\frac{8L^3}{6EI}(2w_0L-R)+\frac{16w_0L^4}{24EI}=\frac{2ML^2}{EI}-\frac{2w_0L^4}{EI}+\frac{8RL^3}{3EI} \quad (22)$$

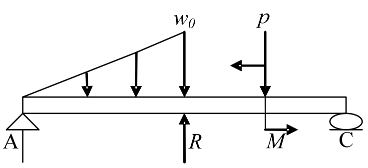
（22）式移項處理可得靜不定樑的多餘約束反力爲

$$R=\frac{3}{4}\left(w_0L-\frac{M}{L}\right) \quad (23)$$

3. 範例 3：求圖 3 之三支撐點靜不定連續樑的 B 點反力。



(a) 一次靜不定連續樑



(b) 靜定簡支樑（解除支撐點 B 處約束力）

圖 3. 三點支撐靜不定連續樑

解題：解除圖 3(a) 支撐點 B 處的多餘約束力，將之視爲集中載重 R，此時樑上的作用載重如圖 3(b) 所示爲一簡支樑。

（1）樑上的作用載重函數：將圖 3(b) 樑上的作用載重參考（8）-（11）式，利用疊加原理表示爲

$$Q(x)=p\left(x-\frac{3}{2}L\right)^3u\left(x-\frac{3}{2}L\right)-R(x-L)^3u(x-L)+3M\left(x-\frac{3}{2}L\right)^2u\left(x-\frac{3}{2}L\right)+\frac{w_0}{20L}\{x^5u(x)-5L(x-L)^4u(x-L)-(x-L)^5u(x-L)\} \quad (24)$$

（2）邊界條件：樑端點處的撓度、轉角、彎矩與剪力等分別分別滿足如下條件：

$$y(0)=0,\ y''(0)=0,\ y'''(0)=\frac{-1}{EI}\left(\frac{7w_0L}{18}+\frac{p}{2}-\frac{2R}{3}+\frac{M}{3L}\right),$$
$$y(L)=0,\ y(2L)=0,\ y''(2L)=0 \quad (25)$$

將（25）式端點邊界條件代入（6）式得

$$y(x)=xy'(0)-\frac{x^3}{6EI}\left(\frac{7w_0L}{18}+\frac{p}{2}-\frac{2R}{3}+\frac{M}{3L}\right)+\frac{Q(x)}{6EI} \quad (26)$$

當 $x\in(0,L)$ 時，$u(x)=1$，$u(x-L)=u\left(x-\frac{3L}{2}\right)=0$，代入（24）式得

$$Q(x)=\frac{w_0x^5}{20L} \quad (27)$$

（27）式代入（26）式且令 $y(L)=0$ 得

$$0=Ly'(0)-\frac{L^3}{6EI}\left(\frac{7w_0L}{18}+\frac{p}{2}-\frac{2R}{3}+\frac{M}{3L}\right)+\frac{w_0L^4}{120EI}=Ly'(0)-\frac{pL^3}{12EI}+\frac{RL^3}{9EI}-\frac{ML^2}{18EI}-\frac{61w_0L^4}{1080EI} \quad (28)$$

當 $x\in(L,2L)$ 時，$u(x)=u(x-L)=u\left(x-\frac{3L}{2}\right)=1$，$u(x-2L)=0$，代入（24）式得

$$Q(x)=p\left(x-\frac{3}{2}L\right)^3-R(x-L)^3+3M\left(x-\frac{3}{2}L\right)^2$$

$$+\frac{w_0}{20L}\{x^5-5L(x-L)^4-(x-L)^5\} \qquad (29)$$

（29）式代入（26）式且令 $y(2L)=0$ 得

$$0=2Ly'(0)-\frac{8L^3}{6EI}\left(\frac{7w_0L}{18}+\frac{p}{2}-\frac{2R}{3}+\frac{M}{3L}\right)+\frac{p}{6EI}\left(2L-\frac{3}{2}L\right)^3$$

$$-\frac{R}{6EI}(2L-L)^3+\frac{M}{2EI}\left(2L-\frac{3}{2}L\right)^2$$

$$+\frac{w_0}{120EIL}\{32L^5-5L(2L-L)^4-(2L-L)^5\}$$

$$=2Ly'(0)+\frac{4w_0L^3}{9EI}+\frac{pL^3}{3EI}-\frac{2RL^3}{3EI}+\frac{2ML^2}{3EI}-\frac{pL^3}{48EI}+\frac{RL^3}{6EI}$$

$$+\frac{ML^2}{8EI}-\frac{12w_0L^4}{60EI}=2Ly'(0)-\frac{163w_0L^4}{540EI}-\frac{31pL^3}{48EI}+\frac{13RL^3}{18EI}$$

$$-\frac{23ML^2}{72EI} \qquad (30)$$

聯立解（28）（30）式，可得靜不定樑的多餘約束反力爲

$$0=\frac{3w_0L^4}{20EI}+\frac{11pL^3}{48EI}-\frac{RL^3}{3EI}+\frac{5ML^2}{8EI},\ R=\frac{17w_0L}{45}+\frac{23p}{24}+\frac{5M}{12L} \qquad (31)$$

4. 範例 4：求圖 4 之四支撐點靜不定連續樑的 B 與 C 點反力 [11]。

解題：解除圖 4(a) 支撐點 B 與 C 兩處的多餘約束力，將之視爲集中載重 R_B 與 R_C，此時樑上的作用載重如圖 4(b) 所示爲一簡支樑。

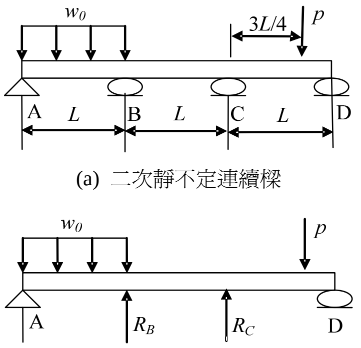
（1）樑上的作用載重函數：將圖 4(b) 樑上的作用載重參考（8）-（11）式，利用疊加原理表示爲

$$Q(x)=p\left(x-\frac{11}{4}L\right)^3u\left(x-\frac{11}{4}L\right)$$

$$-R_B(x-L)^3u(x-L)R_c(x-2L)^3u(x-2L)$$

$$+\frac{w_0}{4}[x^4u(x)-(x-L)^4u(x-L)] \qquad (32)$$

（2）邊界條件：樑端點處的撓度、轉角、彎矩與剪力等分別滿足如下條件：



(a) 二次靜不定連續樑

(b) 靜定簡支樑（解除支撐點 B 與 C 處約束力）

圖 4. 四點支撐靜不定連續樑

$$y(0)=0,\ y''(0)=0,\ y'''(0)=\frac{-1}{EI}\left(\frac{5w_0L}{6}+\frac{p}{12}-\frac{2R_B}{3}-\frac{R_C}{3}\right),$$

$$y(L)=0,\ y(2L)=0,\ y(3L)=0,\ y''(3L)=0 \qquad (33)$$

將（33）式端點邊界條件代入（6）式得

$$y(x)=xy'(0)-\frac{x^3}{6EI}\left(\frac{5w_0L}{6}+\frac{p}{12}-\frac{2R_B}{3}-\frac{R_C}{3}\right)+\frac{Q(x)}{6EI} \qquad (34)$$

當 $x\in(0, L)$ 時，$u(x)=1$，

$u(x-L)=u(x-2L)=u\left(x-\frac{11}{4}L\right)=0$ ，代入（32）式得

$$Q(x)=\frac{w_0x^4}{4} \qquad (35)$$

（35）式代入（34）式且令 $y(L)=0$ 得

$$0=Ly'(0)-\frac{L^3}{6EI}\left(\frac{5w_0L}{6}+\frac{p}{12}-\frac{2R_B}{3}-\frac{R_C}{3}\right)+\frac{w_0L^4}{24EI}$$

$$=Ly'(0)-\frac{7w_0L^4}{72EI}-\frac{pL^3}{72EI}+\frac{R_BL^3}{9EI}+\frac{R_CL^3}{18EI} \qquad (36)$$

當 $x\in(L, 2L)$ 時，$u(x)=u(x-L)=1$，

$u(x-2L)=u\left(x-\frac{11}{4}L\right)=0$ ，代入（32）式得

$$Q(x)=\frac{w_0}{4}[x^4-(x-L)^4]-R_B(x-L)^3 \qquad (37)$$

（37）式代入（34）式且令 $y(2L)=0$ 得

$$0 = 2Ly'(0) - \frac{8L^3}{6EI}\left(\frac{5w_0L}{6} + \frac{p}{12} - \frac{2R_B}{3} - \frac{R_C}{3}\right)$$
$$+\frac{w_0}{24EI}[16L^4 - (2L-L)^4] - \frac{R_B}{6EI}(2L-L)^3$$
$$= 2Ly'(0) - \frac{35w_0L^4}{72EI} - \frac{pL^3}{9EI} + \frac{13R_BL^3}{18EI} + \frac{4R_CL^3}{9EI} \qquad (38)$$

當 $x\in(2L, 3L)$ 時，

$u(x) = u(x-L) = u(x-2L) = u\left(x - \frac{11}{4}L\right) = 1$，代入（32）式得

$$Q(x) = p\left(x - \frac{11}{4}L\right)^3 - R_B(x-L)^3 - R_C(x-2L)^3$$
$$+\frac{w_0}{4}[x^4 - (x-L)^4] \qquad (39)$$

（39）式代入（34）式且令 $y(3L)=0$ 得

$$0 = 3Ly'(0) - \frac{27L^3}{6EI}\left(\frac{5w_0L}{6} + \frac{p}{12} - \frac{2R_B}{3} - \frac{R_C}{3}\right)$$
$$+\frac{p}{6EI}\left(3L - \frac{11}{4}L\right)^3 - \frac{R_B}{6EI}(3L-L)^3 - \frac{R_C}{6EI}(3L-2L)^3$$
$$+\frac{w_0}{24EI}[81L^4 - (3L-L)^4]$$
$$= 3Ly'(0) - \frac{25w_0L^4}{24EI} - \frac{143pL^3}{384EI} + \frac{5R_BL^3}{3EI} + \frac{4R_CL^3}{3EI} \qquad (40)$$

聯立解（36）、（38）、（40）式，可得靜不定樑的多餘約束反力為

$$R_c = \frac{25}{64}p - \frac{1}{10}w_0L,\ R_B = \frac{13}{20}w_0L - \frac{3}{32}p \qquad (41)$$

令 $p=w_0L$ 代入(41)式的結果與 Gere 和 Timoshenko [11] 的計算結果一致。

（二）討論

以上四個計算例的計算結果顯示，應用拉普拉斯推導得的撓曲曲線通式（即（6）式）可解梁的靜不定問題。解題的關鍵在於將多餘的約束反力解除後視為樑上的作用載重，用疊加原理組合載重函數 $Q(x)$ 後，再與端點邊界條件 $y(0), y'(0), y''(0)$ 與 $y'''(0)$ 等一起代入（6）式，即可獲得多餘約束反力的解答，再進一步地運用靜力平衡條件，就可解得所有的約束反力。整個計算過程不涉及積分，十分簡捷且方便應用。

四、結論

用拉普拉斯變換法解均質等截面靜不定樑，為眾多傳統解法如能量法、面積力矩法、共軛樑法、奇異函數法、積分法等以外的另一種選擇。本文用拉普拉斯變換將樑的撓曲曲線方程式 $Ely^{(4)}=-q(x)$ 化為代數方程式，進而推導得包含作用在樑上的載重函數 $Q(x)$ 與端點邊界條件 $y(0), y'(0), y''(0)$ 與 $y'''(0)$ 之解析公式。只要將作用在樑上的載重（包含多餘約束反力）以疊加原理組合成載重函數 $Q(x)$，再將端點的邊界條件一起代入解析公式，即可解得靜不定樑的多餘約束反力，再進一步地運用靜力平衡條件，就可解得所有的約束反力。本文中用四個範例說明應用此解析公式求解靜不定樑的具體方法與步驟，整體計算過程簡潔易懂且方便應用，具有實用價值。

參考文獻

1. 田進軍（民 88），Dirac 函數及其在積分變換中的應用，職大學報，2，44-51。
2. 吳從炘（民 73），δ 函數對力學應用的幾點注記，工程數學學報，1(1)，頁 142-145。
3. 李豐浦（民 83），階梯軸彎曲變形的拉普拉斯變換計算法，甘肅工業大學學報，20(3)，48-51。
4. 孫立來（民 85），用拉普拉斯變換求解階梯梁的臨界載荷，建設機械技術與管理，5，26-27。
5. 容躍堂、劉琦云（民 89），δ- 函數及其在機械學中的應用，西北紡織工學院學報，14(2)，160-163。
6. 馮賢桂（民 80），用奇異函數及拉氏變換求解階梯梁的彎曲變形，重慶大學學報，14(6)，111-114。
7. 劉念超（民 87），奇異函數法解幾種超靜定結構，長沙交通學院學報，14(2)，20-25。
8. 蔡廣新（民 87），用單位階躍函數求解超靜定梁，承德民族師專學報，2，41-43。
9. 鮑明（民 77），關於沖激函數 δ(t)，振動、測試與診斷，3，45-50。
10. Gere, J. M. and S. P. Timoshenko (1990) *Mechanics of Materials SI Edition*, 3rd Ed., 496-512. PWS-KENT, Boston, MA.

11. Gere, J. M. and S. P. Timoshenko (1999) *Mechanics of Materials SI Edition*, 4th Ed., 599-730. Stanley Thornes, United Kingdom.
12. Hibbeler, R. C. (2004) *Mechanics of Materials SI Edition*, 569-634. Prentice Hall, Singapore.

收件：**98.04.29**　修正：**98.06.09**　接受：**98.07.27**