

一種拋物線運動誤差大小可控之新型面齒輪傳動機構

李政綱¹ 王進猷² 鄭永長³

¹正修科技大學工業工程與管理系

²正修科技大學機械工程系

833 高雄縣鳥松鄉澄清路 840 號

³國立高雄第一科技大學機械與自動化工程系

811 高雄市楠梓區卓越路 2 號

摘要

本文提出一具有拋物線運動誤差且誤差大小可以控制之面齒輪傳動機構。藉由引入三次多項式齒形之創成齒條並對機構中之小齒輪施予齒向與齒高修形，得到了一個接觸齒印集中且具可控拋物線運動誤差之面齒輪傳動機構。與傳統的面齒輪相比，本文所提出之面齒輪機構對於裝配與製造誤差具有強韌而不敏感的特性，故傳動更為平穩且有較低的噪音。應用座標轉換法與齒輪嚙合原理，本文已導出創成齒條齒面數學模式、小齒輪齒面數學模式、面齒輪齒面數學模式、齒面接觸分析數學模式及控制拋物線運動誤差大小之統御方程組。應用所導出之數學模式與牛頓數值求根法，分析不同裝配條件下對面齒輪機構運動誤差之影響。最後，應用數值範例驗證了此面齒輪機構之優良傳動特性。

關鍵詞：面齒輪，齒面接觸分析，運動誤差，三階多項式

A Face-Gear Drive with Parabolic Amplitude Control of Kinematic Errors

CHENG-KANG LEE¹, CHIN-YU WANG² and YUNG-CHANG CHENG³

¹*Department of Industrial Engineering and Management, Cheng Shiu University*

²*Department of Mechanical Engineering, Cheng Shiu University*

No.840, Chengcing Rd., Niasong Township, Kaohsiung County, Taiwan 833, R.O.C.

³*Department of Mechanical and Automation Engineering, National Kaohsiung First University of Science and Technology*

No.2, Jhuoyue Rd., Nanzih District, Kaohsiung City, Taiwan 811, R.O.C.

ABSTRACT

This report proposes a new type of face-gear drive for minimizing transmission errors by controlling the parabolic amplitude within. By applying a generating rack cutter with a third order polynomial tooth profile as well as applying both longitudinal and profile modifications to the pinion, the drive is provided with localized bearing contact and a parabolic function for controlling transmission errors. Therefore, the proposed drive is robust against many types of errors such as those occurring in assembly and manufacturing. This drive is more stable and generates less noise

than traditional face-gear drives. Based on the coordinate transformation method and gearing theory, the mathematical models for generating the rack cutter, pinion, face-gear, as well as Tooth Contact Analysis (TCA), are established. Thus, a system of governing equations used to control the parabolic amplitude function for reducing transmission errors is proposed. Numerical examples are provided to verify the favorable characteristics of the face-gear drive.

Key Words: face-gear drive, tooth contact analysis (TCA), kinematic errors, third order polynomial

一、前言

齒輪機構主要用途是傳遞兩軸間之運動與動力。理論上,除了非勻速比的非圓齒輪外,其餘的勻速比齒輪機構,其被動齒輪之轉速與主動齒輪的轉速總是希望成一個固定比例的關係。然而在實務上,由於存在不可避免的製造與裝配誤差,被動齒輪的真實轉速往往無法與期望轉速相符,而是存在著運動誤差。運動誤差若為直線型誤差,則嚙合齒面對將互相撞擊,使齒輪機構產生強烈的振動與噪音。為了消除直線型運動誤差對系統的不良影響, Litvin [1] 提出應用一個預先設計的二次多項式運動誤差來吸收直線型運動誤差,使得機構運動誤差曲線由不連續變成連續,因而可大大地降低系統的振動與噪音。要讓齒輪組具有預設的二次多項式運動誤差,必須對共軛齒面加以修形,齒面修形可以透過改變刀具幾何或是改變刀具與被削成齒面間之相對運動來達成。Litvin 與 Kim [2] 對正齒輪對提出修正齒形,得到具拋物線運動誤差之正齒輪組。Seol 與 Litvin [3] 及 Litvin 與 DeDonno [4] 對單包絡圓柱蝸桿蝸輪提出修正齒形,得到具拋物線運動誤差之圓柱蝸桿蝸輪組。Litvin 與 Lu [5] 對雙圓弧螺旋齒輪提出修正齒形,得到具拋物線運動誤差之圓柱蝸桿蝸輪組。Lee 與 Chen [6] 提出以雙刀盤製造曲齒線之圓柱齒輪對,該齒輪對亦具有預設的拋物線運動誤差。面齒輪機構是由圓柱小齒輪與圓錐大齒輪所組成之傳動機構,圓柱小齒輪有正齒輪、螺旋齒輪與蝸桿三種,而大齒輪則是由與小齒輪相同或相似的刀具所削成。根據大小齒輪軸間之相對位置不同,面齒輪機構可分為無偏置正交、無偏置非正交、有偏置正交與有偏置非正交四種。與錐齒輪機構相比,面齒輪機構對於安裝誤差較不敏感,容易齒形修整與背隙調整,因此已被 NASA 應用於高速高負載航空齒輪傳動系統中,以取代傳統的弧齒傘齒輪傳動,通過面齒輪力矩分流傳動的方式,減輕整個傳動系統的重量,同時到達振動小、噪音低的目的 [7]。Litvin 等人 [8] 小齒輪為漸開線正齒輪且正交偏置的面齒輪組進行電腦數值嚙合模擬與接觸分析。Chang 等

人 [9] 亦對小齒輪為漸開線正齒輪之面齒輪組進行研究,探討裝配誤差對運動誤差之影響,並導出齒面過切與齒頂變尖之條件。為了讓面齒輪機構具有對裝配誤差不敏感的特性,許多學者對面齒輪機構提出修整的幾何 [10-14],這些研究的相同特徵都是讓面齒輪機構具有預先設計的拋物線運動誤差,而拋物線運動誤差具有吸收線性運動誤差的能力,因此,造就了面齒輪機構對於誤差不敏感的特性。綜觀以上之研究成果,雖然已經能夠讓面齒輪機構具有拋物線運動誤差,但是卻都沒有提供控制運動誤差大小的精確數學模式。換句話說,運動誤差的大小必須透過試誤法,即從調整刀具齒形參數開始,透過運動誤差分析,檢驗誤差大小是否足夠,若不足,則重新調整刀具齒形參數,一直到誤差大小足夠為止,顯然這樣的試誤法並不能精確的控制運動誤差大小。運動誤差大小影響了齒輪組對於線性運動誤差吸收的能力,當裝配誤差較大,所造成的線性運動誤差也較大,因此必須設計一個較大的拋物線運動誤差,才能將其吸收,進而保證運動曲線為連續的函數。若拋物線運動誤差大小不足,則無法將線性運動誤差吸收,則運動曲線仍然為不連續的函數,齒面撞擊的情形也依然會發生。

本研究提出一種具備預設拋物線運動誤差之面齒輪機構,面齒輪由漸開線齒形之鉋齒刀所削成,而小齒輪則由三次多項式基本齒廓所衍生之鼓形齒條所削成,採用鼓形齒條之目的是為了讓接觸齒印集中出現在齒面中央同時又對誤差較不敏感。鼓形齒條之齒面是由成形砂輪作拋物線運動所削成,而成形砂輪之截面輪廓等於三次多項式基本齒廓。採用三次多項式基本齒廓可使小齒輪齒面具有齒高修形的效果,而採用鼓形齒條則可使小齒輪齒面具有齒向修形的效果。應用座標轉換法與齒輪嚙合原理,本文導出了小齒輪齒面數學模式、面齒輪齒面數學模式及齒面接觸分析數學模式。此外,為了精確地控制拋物線運動誤差的大小,本文也提出一非線性聯立方程組作為控制運動誤差大小之統御方程組。設計者只要將預期之運動誤差大小給定到該方程組中,之後應用牛頓數值求根法求解聯立方程組中之齒廓修形

參數，將解出之參數值代入三次多項式基本齒廓後，便可輕易達到控制運動誤差大小的目的。以此三次多項式基本齒廓所衍生之面齒輪組不但具備拋物線運動誤差，同時誤差大小又等於所預期之大小。與傳統試誤法相較，這種應用牛頓法直接求解聯立方程組中修形參數的方法可大量地縮短面齒輪機構之設計開發時間。文中最後，為了驗證該面齒輪機構具備對安裝誤差不敏感的特性，刻意給予面齒輪機構幾種裝配誤差條件，以分析不同裝配條件下之機構運動誤差。齒面接觸分析數值結果驗證，本文所提出之新型面齒輪機構確實具備對於安裝誤差不敏感的優良特性。

二、數學模式

(一) 三次多項式基本齒廓

圖 1 所示為三次多項式基本齒廓， m 為齒輪模數， α 為齒廓壓力角， a 與 b 分別為齒廓在齒頂與齒根部位之修形量，當 a 與 b 同時為零，則此基本齒廓將回歸到傳統漸開線齒形之基本齒廓，也就是直線。取座標系 $S_0(O_0; x_0, y_0, z_0)$ 與基本齒廓固連運動，基本齒廓所在之平面為 x_0y_0 平面。假設基本齒廓是係數未定之三次多項式曲線，則在座標系 S_0 下，右側基本齒廓之參數方程為：

$$\begin{cases} x_0^{(R)}(u) = u \\ y_0(u) = Au^3 + Bu^2 + Cu + D \end{cases} \quad (1)$$

因為左側基本齒廓與右側基本齒廓對稱 y_0 軸，故要將右側齒廓方程式 (1) 之 $x_0^{(R)}(u)$ 取負號就得到左側基本齒廓之參數方程如下

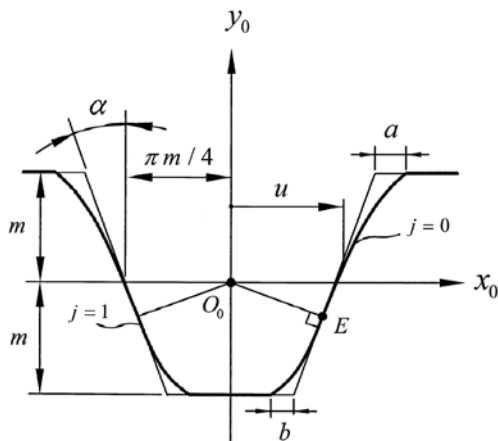


圖 1. 三次多項式基本齒廓

$$\begin{cases} x_0^{(L)}(u) = -u \\ y_0(u) = Au^3 + Bu^2 + Cu + D \end{cases} \quad (2)$$

由方程式 (1) 與 (2)，可將左右兩側基本齒廓之方程合併為如下之通式：

$$\begin{cases} x_0(u) = u \cdot (-1)^j \\ y_0(u) = Au^3 + Bu^2 + Cu + D \end{cases} \quad (3)$$

方程式 (3) 中，令 j 為 0 得到右側齒廓方程式，令 j 為 1 則得到左側齒廓方程式。而三次多項式中之未定係數 A 、 B 、 C 與 D 則是由 4 個代表齒形位置與齒形斜率的約束條件決定。

約束條件一：三次多項式基本齒廓在齒頂 $y_0=m$ 處有 a 的修形量，則有以下之位置約束條件。

$$\begin{cases} m = y_0(u) = Au_a^3 + Bu_a^2 + Cu_a + D \\ u_a = (\pi m / 4 + m \tan \alpha + a) \cdot (-1)^j \end{cases} \quad (4)$$

約束條件二：三次多項式基本齒廓在齒根 $y_0=-m$ 處有 b 的修形量，則有以下之位置約束條件。

$$\begin{cases} -m = y_0(u_b) = Au_b^3 + Bu_b^2 + Cu_b + D \\ u_b = (\pi m / 4 - m \tan \alpha - b) \cdot (-1)^j \end{cases} \quad (5)$$

約束條件三：三次多項式基本齒廓在 E 點處與直線齒廓接觸，故有以下之位置約束條件。

$$\begin{cases} y_0(u_c) = Au_c^3 + Bu_c^2 + Cu_c + D = (-\pi m / 4) \cos \alpha \sin \alpha \\ u_c = (\pi m / 4) \cos^2 \alpha \cdot (-1)^j \end{cases} \quad (6)$$

約束條件四：三次多項式基本齒廓在 E 點處與直線齒廓相切，故有以下之斜率約束條件。

$$\begin{cases} y_0'(u_d) = 3Au_d^2 + 2Bu_d + C = \tan(\pi / 2 - \alpha) \\ u_d = (\pi m / 4) \cos^2 \alpha \cdot (-1)^j \end{cases} \quad (7)$$

以上之約束條件方程式 (4) - (7) 都同樣適用右側與左側齒廓，只要將 j 取 0 則得到右側齒廓約束方程式，將 j 取 1 則得到左側齒廓約束方程式。應用線性代數之矩陣理論求解方程式 (4) - (7) 中之未定係數 A 、 B 、 C 與 D 後，可

以得到未定係數如下：

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_a^3 & u_a^2 & u_a & 1 \\ u_b^3 & u_b^2 & u_b & 1 \\ u_c^3 & u_c^2 & u_c & 1 \\ 3u_d^2 & 2u_d & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} m \\ -m \\ (-\pi m/4)\cos\alpha\sin\alpha \\ \tan(\pi/2-\alpha) \end{bmatrix} \quad (8)$$

值得注意的是，方程式 (8) 同時適用左側與右側基本齒廓，只要將 u_a 、 u_b 、 u_c 與 u_d 之 j 取 0 則適用右側齒廓方程式，令 j 為 1 則適用左側齒廓方程式。而 u_a 、 u_b 、 u_c 與 u_d 則在方程式 (4) - (7) 中已有定義。將方程式 (8) 代回方程式 (3) 中，則可得到以修形量 a 與 b 控制之三次多項式齒廓方程式，當 a 與 b 都等於零時，三次多項式齒廓則回歸到直線齒廓，以直線齒廓齒條創成出之齒輪齒形為漸開線。而當 a 與 b 不同時為零時，齒條齒廓非為直線，此時所創成出之齒輪齒形就不是傳統的漸開線了。

(二) 成形砂輪與鼓形齒條建模

本文所提出之鼓形小齒輪同時兼具齒高修形及齒向修形，所謂齒高修形是指齒形的修整是沿著齒高方向進行，將齒頂與齒根部位之齒形予以向內修整，使齒腹處之輪廓更為隆起。而齒向修形則是沿著齒線方向修整齒形，使齒面在靠近齒輪兩側端面之齒形向內縮減，使齒面在齒輪中央截面處更為隆起。藉由引入三次多項式基本齒廓，可以使小齒輪齒面具有齒高修形的效果，而藉由給予成形砂輪拋物線之運動，則可使小齒輪齒面具有齒向修形的效果。引入齒高修形的目的是使面齒輪機構具有拋物線形式之運動誤差，而引入齒向修形目的則是為了降低接觸點位置對安裝誤差之敏感度，使得接觸點位置不因安裝誤差而有太大的偏移量。

在第一節中導出三次多項式基本齒廓後，以下將以此為基礎，繼續衍生具鼓形效果之齒條齒面，此鼓形齒條將進一步作為創成鼓形小齒輪齒面之刀具齒面。鼓形齒條齒面之生成是透過具拋物線運動之成形砂輪創成而得，成形砂輪的軸截面輪廓必須等於三次多項式基本齒廓，而成形砂輪的迴轉曲面則是以三次多項式基本齒廓繞砂輪軸旋轉得到。在座標系 S_0 下，成形砂輪的軸截面輪廓方程可以表示為：

$$r_0^*(u) = \begin{bmatrix} x_0(u) \\ y_0(u) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

取座標系 $S_1(O_1; x_1, y_1, z_1)$ 與砂輪固連運動，軸 x_1 為砂輪之迴轉軸，當砂輪運動到使 x_1y_1 平面與 x_0y_0 平面重合時，座標系 S_0 與 S_1 之關係如圖 2 所示。令軸截面輪廓 Γ 繞砂輪軸線 x_1 以參數 θ 迴轉後，便可以得到砂輪之迴轉面。應用齊次座標轉換理論 [1]，在座標系 S_1 之下，砂輪之迴轉面數學模式為：

$$\begin{cases} r_1(u, \theta) = \mathbf{M}_{10}(\theta)r_0^*(u) \\ \mathbf{M}_{10}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -P_c/2 \\ 0 & C\theta & S\theta & \rho_p C\theta \\ 0 & -S\theta & C\theta & -\rho_p S\theta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (10)$$

其中， $S\theta$ 表示 $\sin\theta$ ， $C\theta$ 表示 $\cos\theta$ ， ρ_p 為砂輪半徑參數， P_c 為齒輪之周節。

為了包絡出鼓形齒條齒面，此成形砂輪並不是由直線運動所驅動，而是由拋物線運動所驅動。如圖 3 所示，取座標系 S_2 與原齒條座標系 S_p 重合，座標系 S_1 以拋物線相對座標系 S_2 運動，依據齊次座標轉換理論，砂輪迴轉面在座標系 S_2 上將形成一曲面族，該曲面族之方程如下：

$$\begin{cases} r_2^*(u, \theta, \eta_1) = \mathbf{M}_{21}(\eta_1)r_1(u, \theta) \\ \mathbf{M}_{21}(\eta_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & P_c/2 - k_1\eta_1^2 \\ 0 & 1 & 0 & -\rho_p \\ 0 & 0 & 1 & \eta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (11)$$

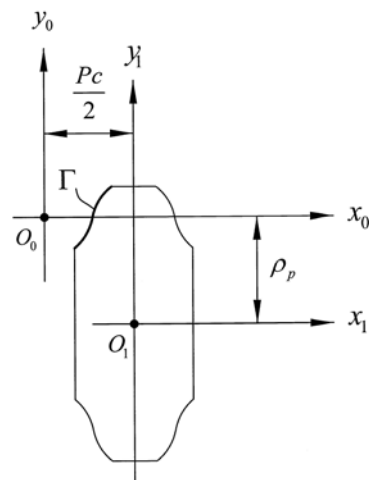


圖 2. 砂輪軸截面輪廓

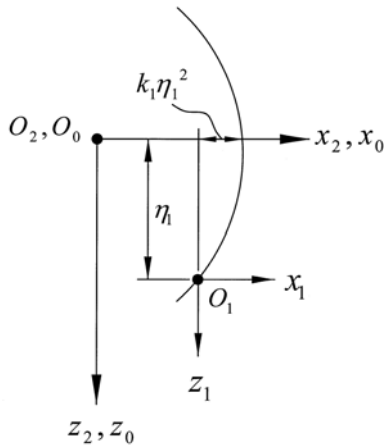


圖 3. 砂輪創成鼓形齒條之座標系運動關係

依據齒輪嚙合原理 [1]，曲面族包絡存在之必要條件稱為嚙合方程式，而曲面族方程式 (11) 之嚙合方程式，經過移項後可將參數 η_1 移到等號左邊，得到以下之顯函數形式：

$$\eta_1 = \frac{\sin(u)x_p'(\theta)}{2k_1y_p'(\theta)} \quad (12)$$

將方程式 (12) 代入式 (11) 後，便可得到鼓形齒條之齒面方程式 $r_2(u, \theta)$ 。由於 $r_2(u, \theta)$ 只有兩個參數，故鼓形齒條齒面之法向量 N_2 與單位法向量 n_2 可以下式求得：

$$\begin{cases} N_2 = \left(\frac{\partial r_2}{\partial u} \times \frac{\partial r_2}{\partial \theta} \right) \\ n_2 = \frac{N_2}{\sqrt{N_2 \cdot N_2}} \end{cases} \quad (13)$$

(三) 鼓形小齒輪建模

為了便於後續推導說明，將鼓形齒條齒面以符號 Σ_2 表示，被創成之鼓形小齒輪齒面以符號 Σ_3 表示。以鼓形齒條齒面 Σ_2 作為母面去創成鼓形小齒輪齒面 Σ_3 時，齒條的節線與齒輪的分度圓之間作無滑動的純滾動運動。如圖 4 所示，取座標系 $S_3(O_3; x_3, y_3, z_3)$ 與鼓形小齒輪齒面 Σ_3 固連運動，當鼓形齒條座標系 S_2 沿著 x_2 軸平移 $(-r_3\phi_3)$ 的距離時，鼓形齒條齒面將不嵌入也不分離地推動鼓形小齒輪齒面，使座標系 S_3 繞 z_3 軸旋轉 $(-\phi_3)$ 的角度。依據齒輪嚙合原理 [1]，鼓形齒條齒面在座標系 S_3 將形成一曲面族，以 $\left\{ \Sigma_2^{\phi_3} \right\}_3$ 表示。應用齊次座標轉換理論， $\left\{ \Sigma_2^{\phi_3} \right\}_3$ 之方程為：

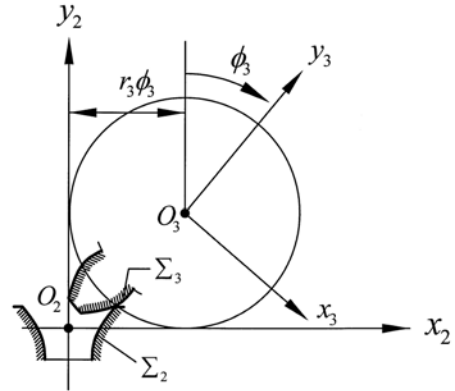


圖 4. 鼓形齒條創成鼓形小齒輪之座標系運動關係

$$\begin{cases} r_3^*(u, \theta, \phi_3) = M_{32}(\phi_3)r_2(u, \theta) \\ M_{32}(\phi_3) = \begin{bmatrix} C\phi_3 & -S\phi_3 & 0 & -r_3\phi_3C\phi_3 + r_3S\phi_3 \\ S\phi_3 & C\phi_3 & 0 & -r_3\phi_3C\phi_3 - r_3S\phi_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (14)$$

將曲面族 $\left\{ \Sigma_2^{\phi_3} \right\}_3$ 方程對運動參數 ϕ_3 偏微就得到鼓形齒條齒面 Σ_2 相對鼓形小齒輪齒面 Σ_3 之運動速度 $v_3^{(23)}$ ：

$$v_3^{(23)} = \frac{\partial r_3^*}{\partial \phi_3} \quad (15)$$

由嚙合原理 [1] 得知，若曲面族 $\left\{ \Sigma_2^{\phi_3} \right\}_3$ 之包絡面存在，則此包絡面即為鼓形小齒輪之齒面 Σ_3 。而曲面族 $\left\{ \Sigma_2^{\phi_3} \right\}_3$ 之包絡存在的必要條件為齒條齒面 Σ_2 之法向量 n_2 與相對速度 $v_3^{(23)}$ 垂直，也就是 n_2 與 $v_3^{(23)}$ 之內積運算為零，故有

$$\Phi(u, \theta, \phi_3) = n_2 \cdot v_3^{(23)} = n_2 \cdot (L_{23}v_3^{(23)}) = 0 \quad (16)$$

方程式 (16) 即為曲面 Σ_2 與 Σ_3 之嚙合方程式，此嚙合方程較為複雜，參數 u 、 θ 與 ϕ_3 均包含在非線性的函數中，無法將任一參數表示為其他參數之顯函數，各參數的數值必須透過牛頓數值求根法求解。故鼓形小齒輪齒面 Σ_3 之數學模式則是以聯立曲面族方程與嚙合方程表示。

聯立式 (14) 與式 (16) 可得到鼓形小齒輪齒面 Σ_3 之方程為：

$$\begin{cases} r_3(u, \theta, \phi_3) = r_3^*(u, \theta, \phi_3) \\ \Phi(u, \theta, \phi_3) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

鼓形小齒輪齒面 Σ_3 之單位法向量則應用座標轉換就可以得到為：

$$n_3 = L_{32}n_2 \quad (18)$$

(四) 鉋齒刀形成之漸開線齒面數學模式

以鉋齒刀削成面齒輪時，鉋齒刀沿刀軸方向作快速直線運動，此直線運動使得鉋齒刀之刀刃形成一柱狀曲面，當鉋齒刀與面齒輪作削成運動時，面齒輪齒面就由此柱狀曲面所包絡成型。當柱狀曲面之端截面輪廓為漸開線時，此柱狀曲面可視為是一正齒輪齒面。此正齒輪齒面與被削成之面齒輪齒面為一對相互嚙合之線接觸共軛曲面。因此，要導出面齒輪齒面，必須先導出此正齒輪之齒面。正齒輪齒面可以由直線齒廓之齒條削成得到，由於直線齒廓僅是三次多項式齒廓之特例，因此可以沿用（一）節所導出之齒條方程式，只要將三次多項式中之修形參數 a 與 b 設定為零，就可得到直線齒廓之方程式。如圖 5 所示，取座標系 $S_0(O_0; x_0, y_0, z_0)$ 與直線齒廓齒條固連，齒條齒面以 Σ_0 表示。取座標系 $S_4(O_4; x_4, y_4, z_4)$ 與鉋齒刀所形成之正齒輪齒面固連，正齒輪齒面以 Σ_4 表示。齒條削成正齒輪齒面時，齒條中線 x_0 軸與齒輪分度圓作相切純滾動運動，正齒輪分度圓半徑以 r_4 表示。依據齊次座標轉換理論，齒條齒面 Σ_0 在座標系 S_4 所形成之曲面族 $\left\{ \sum_0^{\phi_4} \right\}_4$ 的方程為：

$$r_4^*(\phi_4, u, v) = M_{40}(\phi_4)r_0(\mu, v) \quad (19)$$

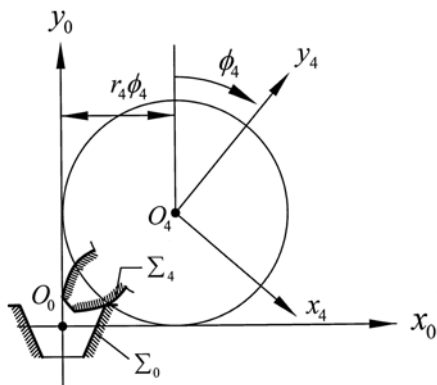


圖 5. 直邊齒廓齒條削成正齒輪之座標系運動關係

其中，

$$M_{40}(\phi_4) = \begin{bmatrix} C\phi_4 & -S\phi_4 & 0 & -r_4\phi_4 C\phi_4 + r_4 S\phi_4 \\ S\phi_4 & C\phi_4 & 0 & -r_4 C\phi_4 - r_4\phi_4 S\phi_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$r_0(\mu, v) = \begin{bmatrix} x_0(u) \\ y_0(u) \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu \cdot (-1)^j \\ A\mu^3 + B\mu^2 + C\mu + D \\ v \\ 1 \end{bmatrix}_{a=0, b=0}$$

將曲面族 $\left\{ \sum_0^{\phi_4} \right\}_4$ 方程對運動參數 ϕ_4 偏微就得到齒條齒面

Σ_0 相對正齒輪齒面 Σ_4 之運動速度 $v_4^{(04)}$ ：

$$v_4^{(04)} = \frac{\partial r_4^*}{\partial \phi_4} \quad (20)$$

依據嚙合原理，直線齒廓齒條齒面 Σ_0 與正齒輪齒面 Σ_4 之嚙合方程為

$$f(\mu, \phi_4) = n_0 \cdot v_4^{(04)} = n_0 \cdot (L_{04}v_4^{(04)}) = 0 \quad (21)$$

由方程式 (21) 可以將參數 ϕ_4 解出成參數 μ 的顯函數為

$$\phi_4 = \frac{(-1)^j \cdot [v + y_0(\mu)y_0'(\mu)]}{r_4} \quad (22)$$

將方程式 (22) 代入式 (19) 後，可得到正齒輪齒面 Σ_4 之方程為：

$$\begin{cases} r_4(\mu, v) = r_4^*(\phi_4, \mu, v) \\ \phi_4 = \frac{(-1)^j \cdot [u + y_0(\mu)y_0'(\mu)]}{r_4} \end{cases} \quad (23)$$

正齒輪齒面 Σ_4 之單位法向量為

$$n_4 = L_{40}n_0 \quad (24)$$

(五) 面齒輪之齒面數學模式

導出鉋齒刀所形成之正齒輪齒面後，下一步就是將此正齒輪齒面作為母面，應用包絡原理削出面齒輪之齒面。鉋齒刀削成面齒輪時之座標運動關係如圖 6 所示，取座標系

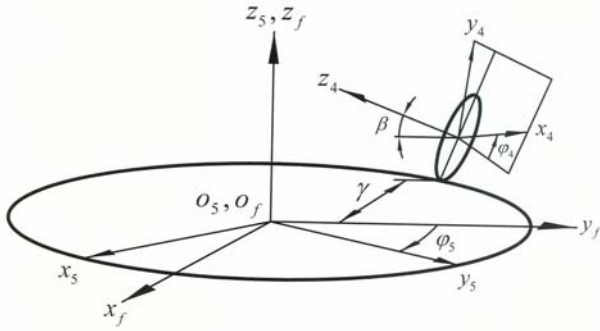


圖 6. 鉋齒刀創成面齒輪之座標系運動關係

$S_5(O_5; x_5, y_5, z_5)$ 與面齒輪固連運動，面齒輪齒面以 Σ_5 表示。座標系 $S_f(O_f; x_f, y_f, z_f)$ 為與機架固連之固定座標系。參數 γ 表示鉋齒刀刀軸在 $x_f y_f$ 平面上之水平偏置量，參數 β 表示鉋齒刀刀軸在 $y_f z_f$ 垂直面上之垂直仰角。鉋齒刀創成面齒輪時，鉋齒刀座標系 $S_4(O_4; x_4, y_4, z_4)$ 繞 z_4 軸旋轉 ϕ_4 角，面齒輪座標系 $S_5(O_5; x_5, y_5, z_5)$ 繞 z_5 軸旋轉 $(-\phi_5)$ 角度。鉋齒刀之齒數 N_4 與面齒輪之齒數 N_5 決定了轉角 ϕ_4 及 ϕ_5 之關係式如下：

$$\frac{\phi_5}{\phi_4} = \frac{N_4}{N_5} = i_{54} \quad (25)$$

依據齒輪嚙合原理，鉋齒刀形成之正齒輪齒面 Σ_4 在面齒輪座標系 S_5 中將形成曲面族，以 $\{\sum_0^{\phi_4}\}_5$ 表示。依據齊次座標轉換理論，曲面族 $\{\sum_0^{\phi_4}\}_5$ 之方程為：

$$\begin{cases} \mathbf{r}_5^*(\phi_4, \mu, \nu) = \mathbf{M}_{54}(\phi_4) \mathbf{r}_4(\mu, \nu) \\ \mathbf{M}_{54}(\phi_4) = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C(i_{54}\phi_4) & 0 & S(i_{54}\phi_4) & -\gamma C(i_{54}\phi_4) - r_5 S(i_{54}\phi_4) \\ S(i_{54}\phi_4) & 0 & -C(i_{54}\phi_4) & -\gamma S(i_{54}\phi_4) + r_5 C(i_{54}\phi_4) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C\phi_4 & -S\phi_4 & 0 & 0 \\ C\beta S\phi_4 & C\beta C\phi_4 & S\beta & r_4 C\beta \\ -S\beta S\phi_4 & -C\phi_4 S\beta & C\beta & -r_4 C\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (26)$$

將曲面族 $\{\sum_0^{\phi_4}\}_5$ 之方程對運動參數 ϕ_4 偏微，就可以得到正齒輪齒面 Σ_4 相對面齒輪齒面 Σ_5 之運動速度 $\mathbf{v}_5^{(45)}$ 為：

$$\mathbf{v}_5^{(45)} = \frac{\partial \mathbf{r}_5^*}{\partial \phi_4} \quad (27)$$

曲面族 $\{\sum_0^{\phi_4}\}_5$ 包絡存在之必要條件為正齒輪齒面 Σ_4 之法向量 \mathbf{n}_4 與相對速度 $\mathbf{v}_5^{(45)}$ 垂直，即 \mathbf{n}_4 與 $\mathbf{v}_5^{(45)}$ 內積為零：

$$\Psi(\mu, \nu, \phi_4) = \mathbf{n}_4 \cdot \mathbf{v}_5^{(45)} = \mathbf{n}_4 \cdot (\mathbf{L}_{45} \mathbf{v}_5^{(45)}) = 0 \quad (28)$$

方程式 (28) 為共軛曲面偶 (Σ_4, Σ_5) 之嚙合方程式，聯立方程式 (26) 與 (28) 可得到面齒輪齒面 Σ_5 之數學模式為：

$$\begin{cases} \mathbf{r}_5(\mu, \nu, \phi_4) = \mathbf{r}_5^*(\mu, \nu, \phi_4) \\ \Psi(\mu, \nu, \phi_4) = 0 \end{cases} \quad (29)$$

(六) 齒面接觸分析

進行齒面接觸分析之前，必須先建立齒面接觸條件方程組。齒面接觸條件方程組為一組非線性代數聯立方程組，此方程組表示一對齒面相互接觸傳動時，彼此相切接觸既不分離也不侵入所必須滿足的條件。首先取固定座標系 $S_f(O_f; x_f, y_f, z_f)$ 與齒輪箱固連，相對固定座標系而言，主動齒面與被動齒面在接觸點之位置向量一定相同，同時兩齒面在接觸點之單位法向量也必須相同，才滿足兩齒面彼此相切接觸既不分離也不侵入之先決條件。根據以上之條件，可以建立以下之拘束條件方程組：

$$\begin{cases} \mathbf{r}_f^{(3)}(u, \theta, \phi_3, \delta_3) - \mathbf{r}_f^{(5)}(\mu, \nu, \phi_4, \delta_5) = \mathbf{0} \\ \mathbf{n}_f^{(3)}(u, \theta, \phi_3, \delta_3) - \mathbf{n}_f^{(5)}(\mu, \nu, \phi_4, \delta_5) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (30)$$

向量 $\mathbf{r}_f^{(3)}(u, \theta, \phi_3, \delta_3)$ 與 $\mathbf{n}_f^{(3)}(u, \theta, \phi_3, \delta_3)$ 表示在座標系 S_f 之下，鼓形小齒輪齒面 Σ_3 之位置向量與單位法向量。向量 $\mathbf{r}_f^{(5)}(\mu, \nu, \phi_4, \delta_5)$ 與 $\mathbf{n}_f^{(5)}(\mu, \nu, \phi_4, \delta_5)$ 表示在座標系 S_f 之下，面齒輪齒面 Σ_5 之位置向量與單位法向量，且

$$\begin{cases} \mathbf{r}_f^{(3)}(u, \theta, \phi_3, \delta_3) = \mathbf{M}_{f3}(\delta_3) \mathbf{r}_3(u, \theta, \phi_3) \\ \mathbf{n}_f^{(3)}(u, \theta, \phi_3, \delta_3) = \mathbf{L}_{f3}(\delta_3) \mathbf{n}_3(u, \theta, \phi_3) \\ \mathbf{r}_f^{(5)}(\mu, \nu, \phi_4, \delta_5) = \mathbf{M}_{f5}(\delta_5) \mathbf{r}_5(\mu, \nu, \phi_4) \\ \mathbf{n}_f^{(5)}(\mu, \nu, \phi_4, \delta_5) = \mathbf{L}_{f5}(\delta_5) \mathbf{n}_5(\mu, \nu, \phi_4) \end{cases} \quad (31)$$

小齒輪齒面為主動旋轉，以參數 δ_3 代表小齒輪之轉動參數，面齒輪齒面為被動旋轉，以參數 δ_5 代表面齒輪之轉動參數。矩陣 $\mathbf{M}_{f3}(\delta_3)$ 及 $\mathbf{M}_{53}(\delta_5)$ 分別代表座標系 S_3 及 S_5 到座標系 S_f 之座標轉換矩陣。

除了式 (30) 所表示之限制條件方程組外，各參數之間還需滿足嚙合方程式：

$$\begin{cases} \Psi(\mu, \nu, \varphi_4) = 0 \\ \Phi(u, \theta, \phi_3) = 0 \end{cases} \quad (32)$$

此外，因為單位法向量之長度已知為 1，即

$$|\mathbf{n}_f^{(3)}| = |\mathbf{n}_f^{(5)}| = 1 \quad (33)$$

方程式 (30) 及 (32) 共有 8 條非線性代數方程式，但由於式 (33) 的限制，故只有 7 條獨立的非線性代數方程式。根據隱函數存在定理，這 7 條獨立的非線性代數方程式決定了 7 個隱函數。將小齒輪之轉動參數 δ_3 視為自變量，其餘的 7 個參數視為因變量，則此 7 條獨立的非線性代數方程式所決定之 7 個隱函數為： $\{u(\delta_3), \alpha(\delta_3), \phi_3(\delta_3), \mu(\delta_3), \nu(\delta_3), \varphi_4(\delta_3), \delta_5(\delta_3)\}$ 。根據數值方法，在將參數 δ_3 指定一連串已知的數值後，應用牛頓數值求根法求解這 7 條獨立非線性代數方程式的根，就可以得到這 7 個隱函數的數值。隱函數 $\delta_5(\delta_3)$ 代表面齒輪轉角隨小齒輪轉角之變化規律， $\{u(\delta_3), \alpha(\delta_3), \phi_3(\delta_3)\}$ 代表小齒輪齒面上接觸點隨小齒輪轉角之變化規律， $\{\mu(\delta_3), \nu(\delta_3), \varphi_4(\delta_3)\}$ 則代表面齒輪齒面上接觸點隨小齒輪轉角之變化規律。

若要分析裝配誤差對傳動的影響，只要將裝配誤差參數預先引入座標轉換矩陣 $\mathbf{M}_{f3}(\delta_3)$ 及 $\mathbf{M}_{53}(\delta_5)$ 內即可。圖 7 表示小齒輪與面齒輪裝配時，小齒輪具有裝配誤差，參數 Δe 表示小齒輪軸在軸向上有軸向裝配誤差，參數 Δc 表示小齒輪軸在徑向上有中心距裝配誤差，參數 Δv 表示小齒輪軸在垂直面上有交叉角誤差，參數 Δh 表示小齒輪軸在水平面上有交錯角誤差。為了清楚的表達各項裝配誤差的位置，圖 7 所顯示之座標系位置為小齒輪與面齒輪尚未轉動前之位置，此時面齒輪座標系 S_5 與固定座標系 S_f 重合，大齒小齒輪的轉角 δ_3 與大齒輪的轉角 δ_5 也因此並未繪入其中。

(七) 控制拋物線運動誤差大小之統御方程組

如圖 8 所示，運動誤差之大小定義為在一嚙合週期內，運動誤差之最大值與最小值之差。在一嚙合週期內，鼓形小

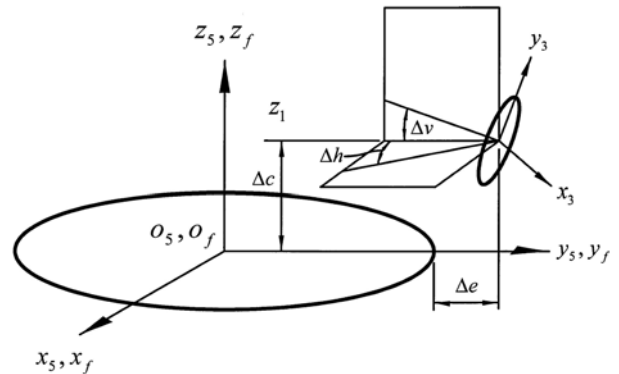


圖 7. 小齒輪與面齒輪裝配時具有裝配誤差

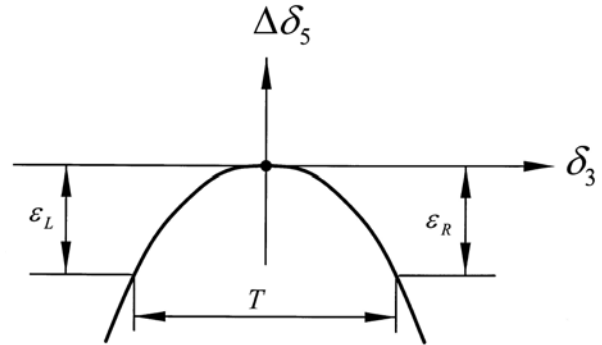


圖 8. 拋物線運動誤差

齒輪轉過 $2\pi/N_3$ 之角度， N_3 代表小齒輪之齒數， ϵ_L 與 ϵ_R 分別代表作用中之運動誤差與前一齒及後一齒運動誤差之交點處之運動誤差大小，每一齒之運動誤差組成了整個齒輪系統的運動誤差曲線，換言之，齒輪系統之運動誤差曲線是由周期為 $2\pi/N_3$ 的單齒運動誤差所組成。在單齒運動誤差範圍內，假設鼓形小齒輪齒面與面齒輪開始接觸時之角位置為 δ_{3L} ，結束接觸時角位置為 δ_{3R} ，則 δ_{3L} 與 δ_{3R} 應滿足以下關係：

$$\delta_{3R} = \delta_{3L} + 2\pi/N_3 \quad (34)$$

小齒輪在角位置 δ_{3L} 時，面齒輪在角位置 δ_{5L} ，此時之運動誤差為 $(-\epsilon_L)$ 。當小齒輪在角位置 δ_{3R} 時，面齒輪則在角位置 δ_{5R} ，此時之運動誤差為 $(-\epsilon_R)$ 。由於角位置之單位為徑度 (rad) 而運動誤差之單位為弧秒 (arcsec)，考慮完單位的一致性之後，面齒輪的輸出角位置 δ_{5L} 與 δ_{5R} 應滿足下式：

$$\delta_{5L} = \frac{-\varepsilon_L}{3600 \times 180} \pi + \frac{N_3}{N_5} \delta_{3L} \quad (35)$$

$$\delta_{5R} = \frac{-\varepsilon_R}{3600 \times 180} \pi + \frac{N_3}{N_5} \delta_{3R} \quad (36)$$

藉由方程式 (35) - (36) 便可將運動誤差大小 ε_L 與 ε_R 與齒輪角位置參數取得關聯，之後再將方程式 (34) - (36) 代入 2.6 節之接觸條件方程式 (30) 與 (32) 中，便可以得到控制運動誤差大小之統御方程組如下：

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{fR}^{(3)}(u_R, \theta_R, \phi_{3R}, \delta_{3L}, a, b) - \mathbf{r}_{fR}^{(5)}(\mu_R, \nu_R, \phi_{4R}, \delta_{3L}, a, b) = 0 \\ \mathbf{n}_{fR}^{(3)}(u_R, \theta_R, \phi_{3R}, \delta_{3L}, a, b) - \mathbf{n}_{fR}^{(5)}(\mu_R, \nu_R, \phi_{4R}, \delta_{3L}, a, b) = 0 \\ \mathbf{r}_{fL}^{(3)}(u_L, \theta_L, \phi_{3L}, \delta_{3L}, a, b) - \mathbf{r}_{fL}^{(5)}(\mu_L, \nu_L, \phi_{4L}, \delta_{3L}, a, b) = 0 \\ \mathbf{n}_{fL}^{(3)}(u_L, \theta_L, \phi_{3L}, \delta_{3L}, a, b) - \mathbf{n}_{fL}^{(5)}(\mu_L, \nu_L, \phi_{4L}, \delta_{3L}, a, b) = 0 \\ \Phi_R(u_R, \theta_R, \phi_{3R}, a, b) = 0 \\ \Phi_L(u_L, \theta_L, \phi_{3L}, a, b) = 0 \\ \Psi_R(\mu_R, \nu_R, \phi_{4R}, a, b) = 0 \\ \Psi_L(\mu_L, \nu_L, \phi_{4L}, a, b) = 0 \end{cases} \quad (37)$$

方程式 (37) 所代表之非線性聯立方程組，共包含 14 條獨立的非線性代數方程式，故可解出 14 個未知參數，這些參數包含三次多項式齒廓修形參數 a 與 b 。利用牛頓數值求根法將式 (37) 之未知參數 a 與 b 解出後，以此值對三次多項式齒廓作設定，則從此齒廓所衍生出之面齒輪傳動機構在運轉時，即具備拋物線之運動誤差，同時誤差大小即為所期望控制之大小。

三、數值分析

應用 (六) 節所建立之齒面接觸分析數學模式，經編寫電腦數值分析程式後，即可以數值方法探討不同裝配誤差對機構運動誤差之影響。傳統無齒高及齒向修形之面齒輪機構如果有製造上的些微誤差，即會產生如圖 9 所示之線性運動誤差。圖 9 所示之線性運動誤差為無齒高及齒向修形之面齒輪機構當有壓力角製造誤差時經由齒面接觸分析得到的運動誤差。線性運動誤差導致運動誤差曲線不連續，在換齒處齒面將發生撞擊，造成嚴重之振動與噪音，是非常不佳之設計。而本研究提出之新型面齒輪機構則具有預設之拋物線運動誤差，具有對裝配誤差不敏感的特性。以下透過數值分析，探討不同裝配誤差條件下，對齒輪組運動誤差曲線之影

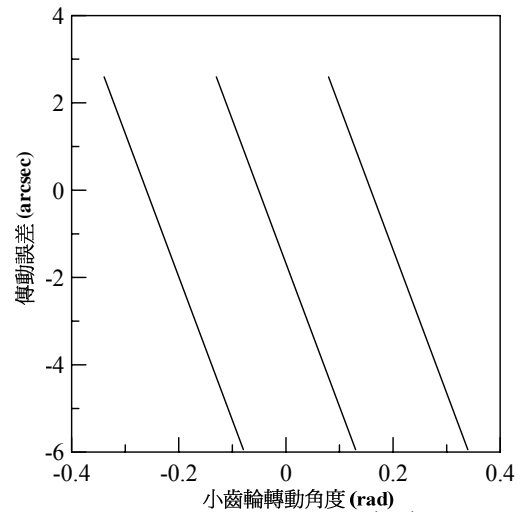


圖 9. 線性運動誤差

響。面齒輪組之設計參數按表 1 所示之數據設定。修形參數 a 與 b 的值則是透過求解統御方程組 (36) 得到，而運動誤差的大小設定為 10 arcsec。考慮表 2 所示之 15 種之安裝誤差情形，狀況 1 表示沒有任何裝配誤差，也就是理想裝配狀態。狀況 2 到 5 為具有中心距之裝配誤差，經過齒面接觸分析計算後得到各狀況之運動誤差曲線如圖 10 所示，黑色虛線為狀況 1 理想狀態時之運動誤差曲線，可以看到運動誤差大小的確為所預先控制之 10 arcsec。其餘的四條運動誤差曲線則代表有中心距裝配誤差時之運動誤差曲線，顯示中心距裝配誤差並不會改變運動誤差曲線之形狀與誤差大小，單一週期內之運動誤差曲線仍保持左右對稱性。顯示齒面上之接觸點並沒有太大的偏移。狀況 6 與 7 代表小齒輪具有軸向裝配誤差，經接觸分析後得到如圖 11 所示之運動誤差曲線，藍色實線與紅色實線分別為軸向誤差為 0.1m 與 -0.1m 時之運動誤差曲線，黑色虛線為理想情況下之運動誤差曲線，三條曲線很靠近，單一週期內之運動誤差曲線仍保持左右對稱性，表示面齒輪組對於小齒輪軸向裝配誤差不敏感。

狀況 8 與 9 為具有交叉角裝配誤差之情形，此時之運動誤差曲線如圖 12 所示，紅色實線與藍色實線分別代表交叉角裝配誤差為 0.1 度與 -0.1 度時之運動誤差曲線，黑色虛線代表理想運動誤差曲線，由於這 3 條曲線幾乎重疊，因此無法從圖上清楚分辨出是 3 條曲線。因此，本新型面齒輪對交叉角誤差非常不敏感。

狀況 10 與 11 為存在交錯角裝配誤差時之情形，此時之運動誤差曲線如圖 13 所示，藍色實線與粉紅色實線分別為

表 1. 基本參數設定

編號	參數名稱	符號	單位	設定值
1	模數	m	mm	6
2	壓力角	α	deg	20
3	小齒輪齒數	N_3	—	30
4	鉋齒刀齒數	N_4	—	33
5	面齒輪齒數	N_5	—	120
6	小齒輪分度圓半徑	R_3	mm	$mN_3/2$
7	鉋齒刀分度圓半徑	R_4	mm	$mN_4/2$
8	面齒輪半徑	R_5	mm	$mN_5/2$
9	砂輪半徑	ρ_p	mm	60
10	運動誤差大小	ε	arcsec	10
11	運動誤差週期	T	rad	$2\pi/N_3$
12	小齒輪周節	P_c	mm	πm
13	拋物線參數	k_1	mm^{-1}	0.1×10^{-2}
14	三次多項式齒廓 齒頂修形量	a	mm	-0.96×10^{-1}
15	三次多項式齒廓 齒根修形量	b	mm	0.53×10^{-1}

表 2. 分析裝配誤差對運動誤差影響之參數設定

狀況	中心距誤差 Δc (mm)	軸向誤差 Δe (mm)	交叉角誤差 Δv (degree)	交錯角誤差 Δh (degree)
1	0	0	0	0
2	0.01m	0	0	0
3	0.02m	0	0	0
4	-0.01m	0	0	0
5	-0.02m	0	0	0
6	0	0.1m	0	0
7	0	-0.1m	0	0
8	0	0	0.1	0
9	0	0	-0.1	0
10	0	0	0	0.3
11	0	0	0	-0.3
12	0	0.1m	0.3	0.3
13	0	-0.1m	-0.3	-0.3
14	0.01m	0.1m	0.3	0.3
15	0.01m	-0.1m	-0.3	-0.3

交錯角裝配誤差 0.3 度與 -0.3 度時之運動誤差曲線，黑色虛線為理想情況下之運動誤差曲線，與黑色虛線相比，藍色實線的右尾拉長，左尾變短，單一週期內之運動誤差曲線已無左右對稱性，拋物線之起始位置改變，但拋物線運動誤差大小沒有改變。

狀況 12 與 13 表示同時具有軸向裝配誤差、交叉角與交

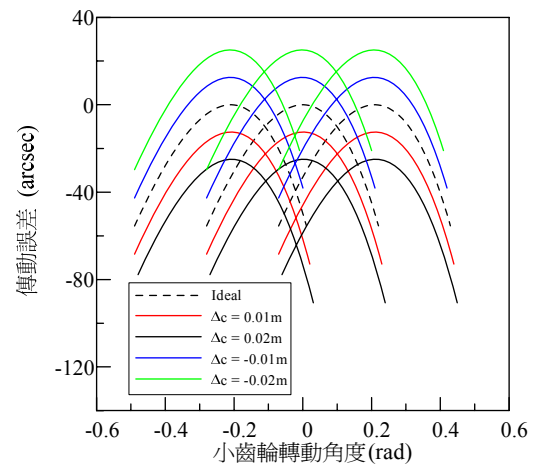


圖 10. 狀況 2 至狀況 5 之運動誤差曲線

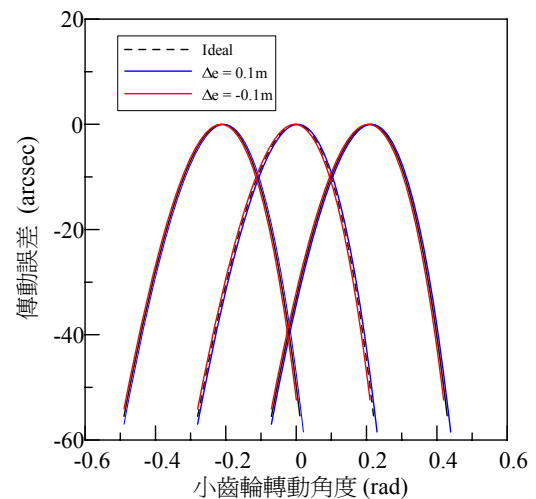


圖 11. 狀況 6 與狀況 7 之運動誤差曲線

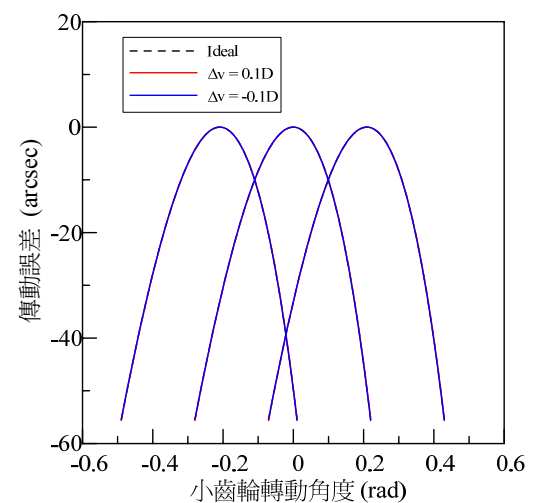


圖 12. 狀況 8 與狀況 9 之運動誤差曲線

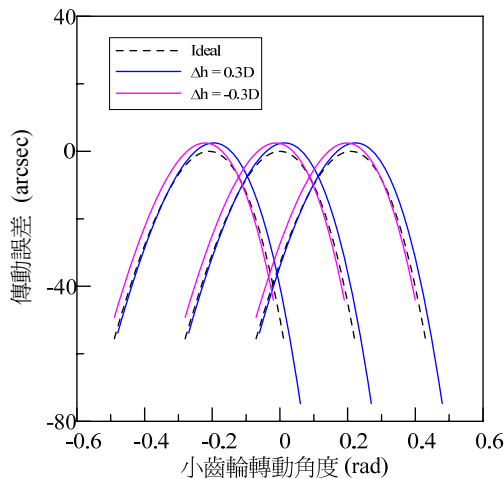


圖 13. 狀況 10 與狀況 11 之運動誤差曲線

錯角之裝配誤差，運動誤差曲線如圖 14 所示，藍色實線為軸向誤差 $0.1m$ 、交叉角誤差 0.3 度、交錯角誤差 0.3 度時之運動誤差曲線，紅色實線為軸向誤差 $-0.1m$ 、交叉角誤差 -0.3 度、交錯角誤差 -0.3 度時之運動誤差曲線，與理想運動誤差之黑色虛線相比，拋物線之形狀同樣不變，但拋物線之起始位置改變，單一週期內之運動誤差曲線已無左右對稱性。

狀況 14 與 15 為具有四種安裝誤差之情形，包含軸向誤差、中心距誤差、交叉角誤差與交錯角誤差，經接觸分析後得到之運動誤差曲線如圖 15 所示，紅色實線為中心距誤差 $0.01m$ 、軸向誤差 $0.1m$ 、交叉角誤差 0.3 度、交錯角誤差 0.3 度時之誤差情況，藍色實線為中心距誤差 $0.01m$ 、軸向誤差

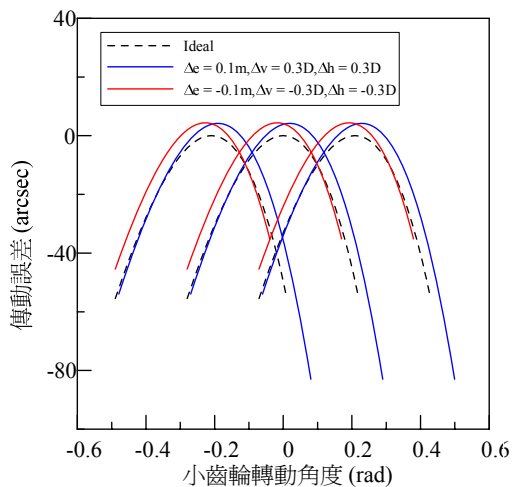


圖 14. 狀況 12 與狀況 13 之運動誤差曲線

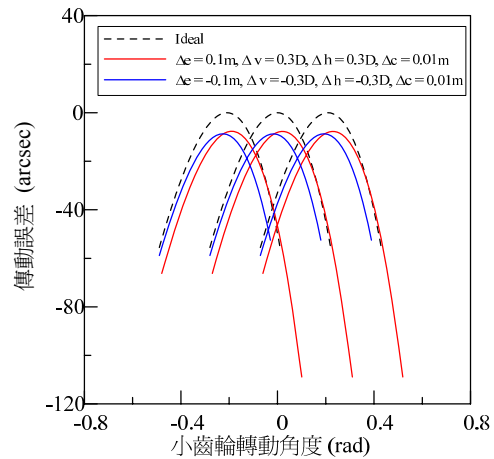


圖 15. 狀況 14 與狀況 15 之運動誤差曲線

$-0.1m$ 、交叉角誤差 -0.3 度、交錯角誤差 -0.3 度時之誤差情況，同樣與理想之黑色虛線相比，拋物線之形狀同樣不變，運動誤差大小也不變，只更改拋物線之起始位置，值得注意的是，紅色的運動誤差曲線的右尾拉得非常長，左尾則相對變短很多，單一週期內之運動誤差曲線已無左右對稱性。

四、結論

本研究已提出具可控拋物線運動誤差之新型面齒輪機構，並導出其數學模式。藉由指定拋物線誤差的大小，透過求解一組非線性聯立方程組，可得到齒輪之修形參數設定值，以此值對參數作設定，即可使所設計之面齒輪服從所預設之運動誤差大小。無預設拋物線運動誤差之傳統面齒輪機構容易因為製造或安裝誤差，而導致線性運動誤差的產生，因此將拋物線運動誤差引入設計中是有必要的。由數值分析之結果可知，本文提出之面齒輪機構對於裝配誤差不敏感，因此可以適用於工作環境較差的場合，即使使用精度較差的軸承，也不會對該面齒輪機構之預設拋物線運動誤差造成影響。

誌謝

感謝國科會（計畫編號：94-2622-E-230-009-CC3）於經費上資助，使本研究得以順利完成。

參考文獻

1. Livtin, F. L. (1994) *Gear Geometry and Applied Theory*,

- Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
2. Litvin, F. L. and D. H. Kim (1997) Computerized design, generation and simulation of meshing of modified of modified involute spur gears with localized beaming contact and reduced level of transmission errors. *Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design*, 119, 96-100.
 3. Seol, I. H. and F. L. Litvin (1996) Computerized design, generation and simulation of meshing and contact of worm-gear drives with improved geometry. *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, 138, 73-103.
 4. De Donno, M. and F. L. Litvin (1999) Computerized design and generation of worm gear drives with stable bearing contact and low transmission errors. *Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design*, 121, 573-578.
 5. Litvin, F. L. and J. Lu (1995) Computerized design and generation of double circular-arc helical gear with low transmission errors. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 127, 57-86.
 6. Lee, C. K. and C. K. Chen (2004) Mathematical models, meshing analysis and transmission design for robust cylindrical gear set generated by double blade-disks with parabolic cutting edges. *Proceedings of the Institution Mechanical Engineers Part C-Journal of Mechanical Engineering Science*, 218, 1539-1553.
 7. Litvin, F. L., J. C. Wang, R. B. Bossler, Y. J. D. Chen, G. Heath and D. G. Lewicki (1994) Application of face gear drives in helicopter transmissions. *ASME Journal of Mechanical Design*, 116, 672-676.
 8. Litvin, F. L., A. Egelja, J. Tan and G. Heath (1998) Computerized design, generation and simulation of meshing of orthogonal offset face-gear drive with a spur involute pinion with localized bearing contact. *Mechanism and Machine Theory*, 33, 87-102.
 9. Chang, S. H., T. D. Chung and S. S. Lu (2000) Tooth contact analysis of face-gear drives. *International Journal of Mechanical Science*, 42, 487-502.
 10. Litvin, F. L., G. Argentieri and M. De Donno and M. Hawkins (2000) Computerized design, generation and simulation of meshing and contact of face worm-gear drives. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 189, 785-801.
 11. Litvin, F. L., A. Fuentes, C. Zanzi and M. Pontiggia (2002) Design, generation, and stress of two versions of geometry of face-gear drives. *Mechanism and Machine Theory*, 37, 1179-1211.
 12. Litvin, F. L., A. Nava, Q. Fan and A. Fuentes (2002) New geometry of face worm gear drives with conical and cylindrical worms: Generation, simulation of meshing, and stress analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191, 3035-3054.
 13. Litvin, F. L., I. Gonzalez-Perez, A. Fuentes, D. Vecchiato, B. D. Hansen and D. Binney (2005) Design, generation and stress analysis of face-gear drive with helical pinion. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194, 3870-3901.
 14. Zanzi, C. and J. I. Pedrero (2005) Application of modified geometry of face gear drive. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194, 3047-3066.

收件：97.04.16 修正：97.09.12 接受：97.10.27